QED

REVISTA MATEMÁTICA

N°1

JUN-22

Segunda edición

QED

REVISTA MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES

Gauss dijo una vez que los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a quienes tienen el valor de profundizar en ella. Esta revista está dedicada a aquellas personas que, guiadas por la curiosidad, ese imperativo deseo de conocer, quieren descubrir un poco más sobre los entresijos de la razón. Esperamos que el lector pueda sentir, al acariciar sus páginas, la ilusión y el cariño con el que este grupo de estudiantes y antiguo alumnado de la Universidad Autónoma de Madrid, en su mayoría de Matemáticas, ha llevado a cabo este proyecto.

ASOCIACIÓN

QED es una asociación que surge como iniciativa de los estudiantes de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid. Esta asociación pretende acercar las Matemáticas al resto de estudiantes de la Facultad de Ciencias a través de diversas actividades.

Como parte de estas actividades se elabora la Revista QED, en la que se incluyen artículos divulgativos, fragmentos de historia de las Matemáticas, acertijos, problemas, y mucho más.

ENCUÉNTRANOS EN

Portal Web
(http://matematicas.uam.es/~qed/)

Instagram (@qed_uam)

Twitter (@qed_uam)

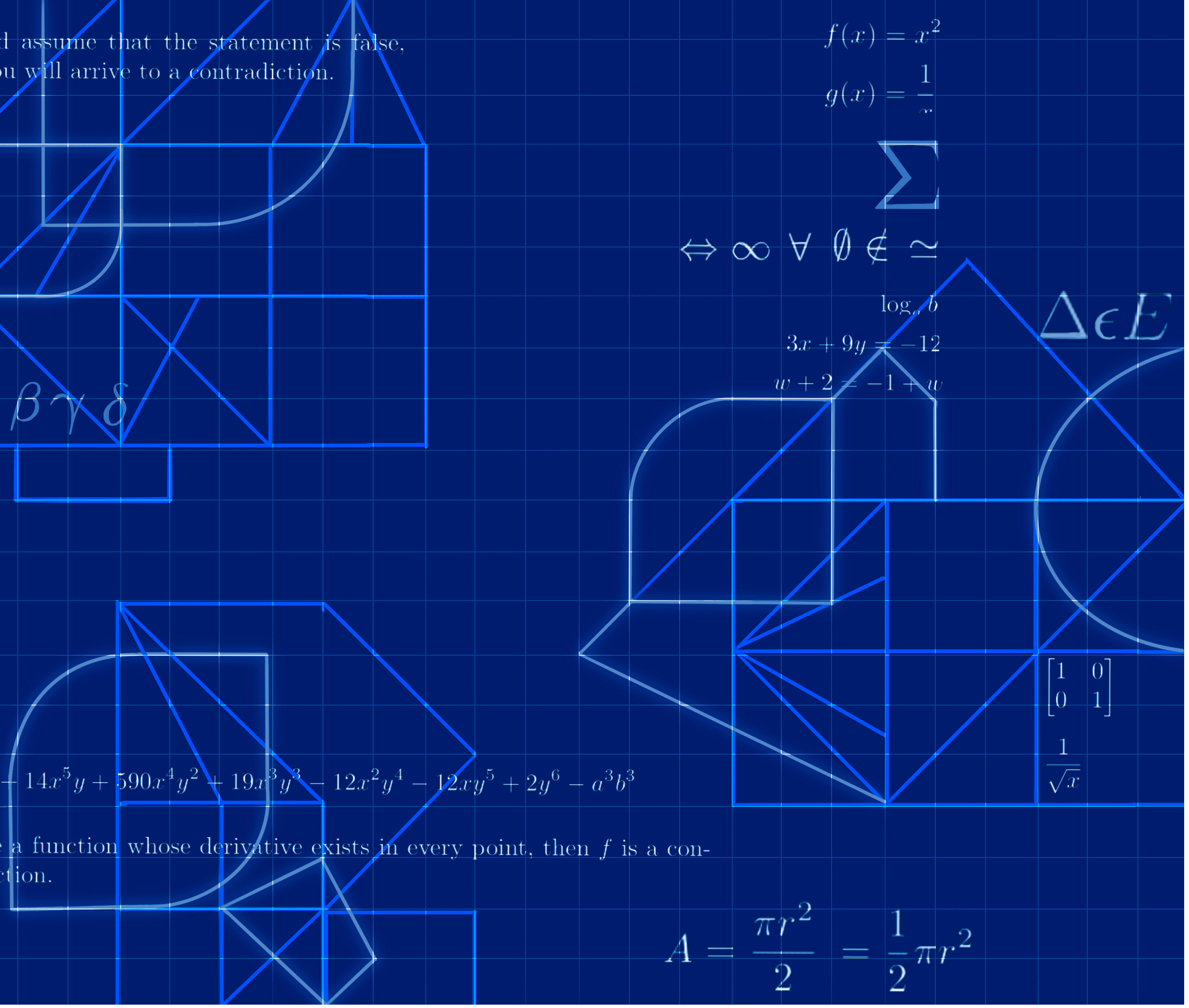
SIGNIFICADO DE NUESTRO NOMBRE

Quod erat demonstrandum, abreviado como QED, es una locución latina que significa ‘lo que se quería demostrar’. Tiene su origen en la frase griega ὅπερ ἔδει δεῖξαι (hóper édei deĩxai), que usaban muchos matemáticos antiguos, incluidos Euclides y Arquímedes, al final de las demostraciones para señalar que habían alcanzado el resultado requerido para la prueba.

Hoy en día, el uso de las siglas QED es cada vez menos frecuente, y en la mayoría de las situaciones se ve sustituido por símbolos, como el cuadrado relleno ($\blacksquare$).

\blacksquare: $\blacksquare$
\square: $\square$

Símbolos de fin de demostración en LaTeX

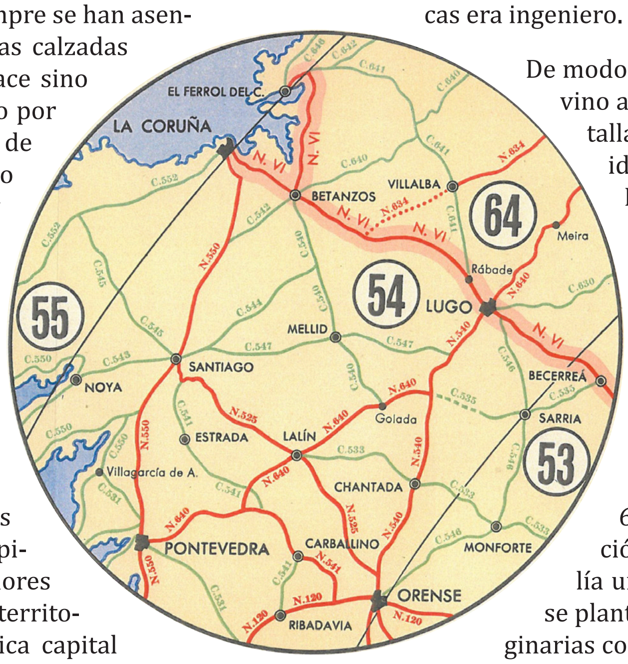

assume that the statement is false.
will arrive to a contradiction.
$f(x) = x^2$
⇔ ∞ ∀ ∅ ∉ ≃
$3x + 9y = -12$
$w + 2 = -1 + w$
ΔϵE
β γ δ
a function whose derivative exists in every point, then f is a con-
$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{2}\pi r^2$

En España nos movemos en polares

Por Pablo Esquer Castill

En el año 1701, Felipe V viajó desde Madrid hasta Figueras (Gerona) para casarse con María Luisa Gabriela de Saboya, su primera esposa. El trayecto emprendido por el Rey Animoso discurrió por localidades como Guadalajara, Zaragoza, Pina de Ebro, Lérida e Igualada. Es decir, realizó un recorrido calcado al que sigue hoy la autopista A2 (pero sin peajes).

Que Felipe V siguiera lo que 300 años más tarde sería la Nacional II no se debe a una extraordinaria coincidencia histórica, sino a que nuestros caminos y carreteras se asientan y siempre se han asentado en el esqueleto de las calzadas romanas. Así, la A2 no hace sino seguir el recorrido abierto por dos calzadas: una que iba de Mérida a Zaragoza pasando por Alcalá de Henares, y otra de Zaragoza a Barcelona.



Pero las calzadas romanas plantearon con el tiempo un problema que ni siquiera la sofisticada ingeniería romana pudo prever. Y es que lo que antaño fueron varias provincias con sendas capitales, en los siglos posteriores se convirtió en un único territorio (España) con una única capital (Madrid), y para entonces la red de calzadas romanas, que contemplaba en su momento varios territorios administrativos, quedó como una maraña de caminos que no dificultaba pero tampoco facilitaba las comunicaciones del Imperio.

La idea brillante la tuvo años más tarde D. Alfonso Peña Boeuf (1888-1966), y fue la siguiente. Cuando uno tiene, como tenían y tienen España y los países de su entorno, un sistema de organización centrado en un único punto (a saber, la capital), esto de entrada sugiere la idea matemática de un *sistema de referencia*, que al final es eso: expresar la ubicación de puntos en el espacio con respecto a uno dado.

Pero más aún: toda vez que se tiene este sistema de organización que se traduce en un sistema de referencia, a la hora de organizar las comunicaciones por tierra lo suyo es expresar la ubicación de un punto en términos de dos magnitudes: a qué *distancia* está del origen y en qué *dirección*, pues como puede apreciarse en muchos mapas de capitales europeas, los sistemas de carreteras son radiales. Y eso, amigo, tal y como notó Alfonso Peña, en matemáticas tiene un nombre: **coordenadas polares**.

No en vano, Peña, además de ministro de Obras Públicas era ingeniero.

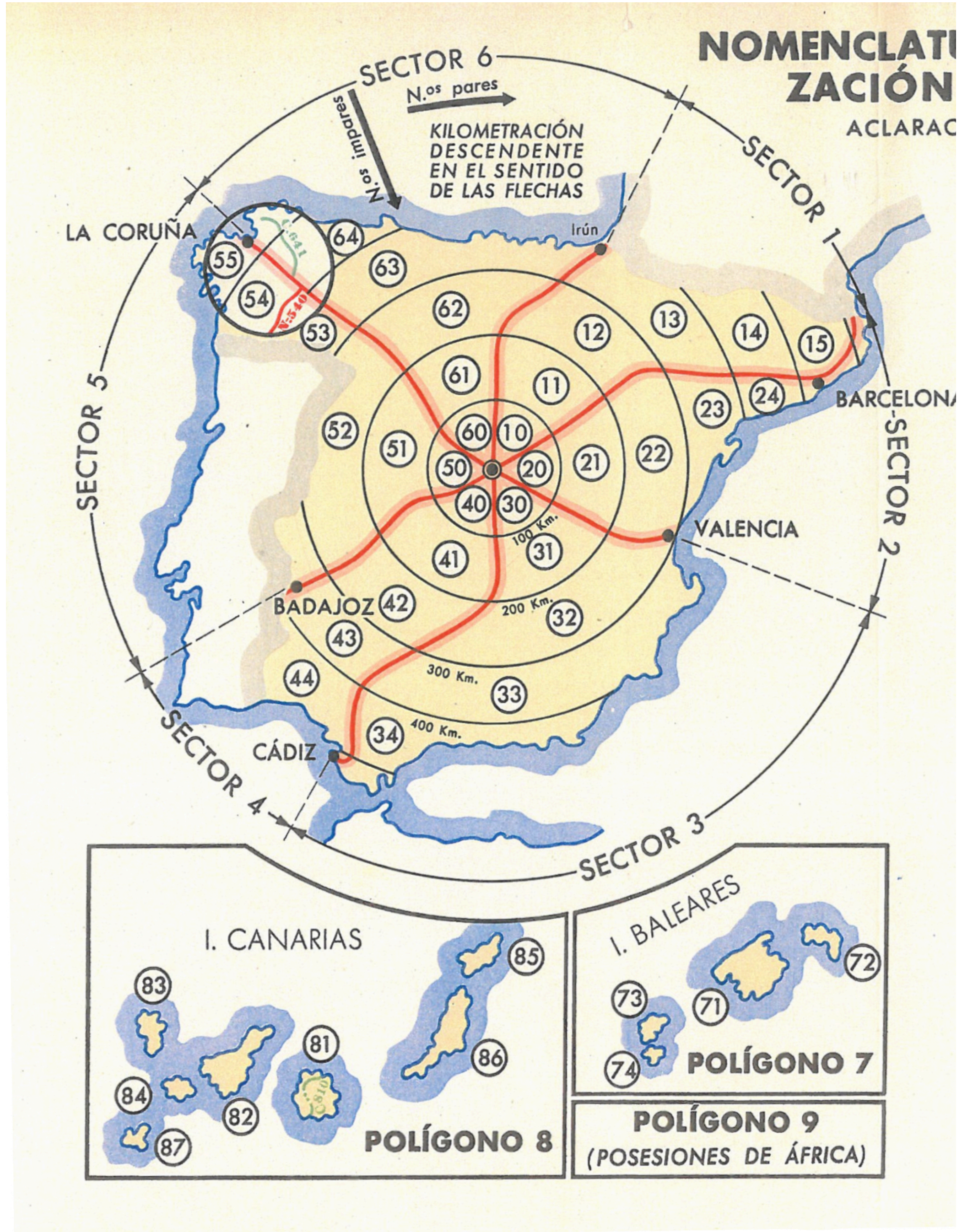
De modo que, dicho y hecho, el que se vino a llamar *Plan Peña* explicó detalladamente el porqué de esta idea y el cómo se ejecutó[1]. De Madrid partirían 6 carreteras de categoría *nacional*, es decir, las más importantes. Eran las carreteras a Burgos, Barcelona, Valencia, Córdoba, Mérida y La Coruña. El plano (esto es, el país) quedaba dividido entonces en 6 sectores numerados asimismo del 1 al 6. Esto marcaría en qué dirección con respecto a Madrid salía una carretera. A continuación, se plantearon 5 circunferencias imaginarias concéntricas en aquella ciudad, de radios 100, 200,... y 500 kilómetros, y una *circunferencia* adicional de radio 0, es decir, un punto (situado en Madrid), y se les asignó números del 0 al 6. Estos números marcarían la distancia al *origen* (el punto). Por tanto, para nombrar una carretera no había más que considerar en qué sector estaba y en qué circunferencia. Una carretera imaginaria que tuviera su origen en el sector 6 (entre la carretera de La Coruña y la de Burgos), a 248 km de Madrid (circunferencia número 2) sería denominada Nacional 62, o N-62. Así existe por ejemplo la N-627, carretera de Burgos a Aguilar de Campoo. El tercer dígito es un *dígito de control* asignado por la diputación local, podemos despreciarlo.

La utilidad de este sistema es que, de manera inversa, si se da el nombre de una carretera, uno puede hacerse la idea de en qué zona está. Por ejemplo, una N-331 estará en el sector 3 a 300 - 400 km de Madrid, es decir, por la zona oeste de Andalucía. En efecto, es la carretera de Córdoba a Málaga.

Y es que, como siempre, todo es más sencillo en polares. Por ejemplo: la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en el disco se convierte, en coordenadas polares, en:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

Bueno... igual las cosas no siempre son más sencillas en polares. ¿O sí?



[1] Puede consultarse el **documento original** del Plan Peña con una explicación más detallada en http://www.carreteros.org/blog/pdfs/1940.pdf, archivo de donde están sacadas estas imágenes.

Matemáticas en la naturaleza

La dimensión fractal

Por Jaime Gómez Ramírez

1. Introducción

A menudo al escuchar la palabra *fractal* es fácil imaginar dibujos de estructuras complicadas, simétricas y habitualmente enrevesadas. Con un poco más de ingenio uno recuerda objetos algo más concretos, como los cristales de hielo, el brócoli o las espirales que forman ciertas flores y plantas. Desde la década de 1980, los fractales han ido ganando popularidad tanto en el arte como en la ciencia, y el público ha sido bombardeado con un término que no acaba de quedar claro. ¿Qué es un fractal? ¿Dónde se encuentran los fractales?

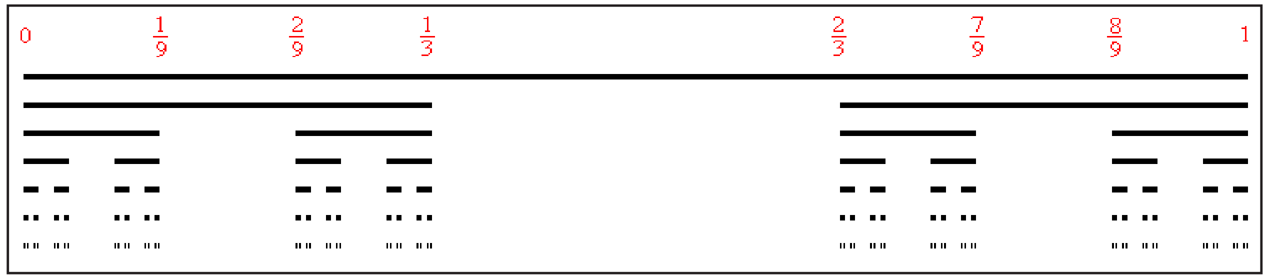
2. Autosemejanza

En matemáticas, el término *fractal* fue acuñado por primera vez por Benoît Mandelbrot, uno de los padres de la geometría fractal. Viene del latín *fractus*, que significa 'roto', con la idea de describir objetos imposibles de estudiar geométricamente mediante las ténicas tradicionales. Algunos ejemplos clásicos incluyen el conjunto de Cantor, la curva de Von Koch y el triángulo de Sierpinski, y entre todos ellos hay una propiedad en común: la autosemejanza.

Estos conjuntos que hemos mencionado son muy relevantes en varias áreas en matemáticas, ya que sirven de ejemplo para ilustrar una enorme variedad de fenómenos. El conjunto de Cantor, por ejemplo, es gigantesco: tiene tantos elementos como números reales. Sin embargo, geométricamente es muy pequeño, ya que en comparación con la recta real, este apenas ocupa lugar (su medida de Lebesgue es 0).

Para construirlo, tomamos el intervalo [0,1] y lo dividimos en tres partes iguales, eliminando la porción central sin incluir sus extremos. Así nos quedamos con los intervalos [0, 1/3] y [2/3, 1]. Con cada uno de esos intervalos hacemos lo mismo: los dividimos en tres y eliminamos el central. Iterando este proceso con los intervalos restantes de cada paso al final obtenemos el conjunto de Cantor.

El triángulo de Sierpinski se construye de manera similar, pero en el plano. Tomamos un triángulo equilátero de lado 1. Lo dividimos en cuatro triángulos equiláteros y eliminamos el central. Nos quedamos así con tres triángulos equiláteros de lado 1/2. Realizando este mismo proceso en cada uno de ellos e iterándolo con los resultantes en cada paso acabamos llegando al triángulo de Sierpinski. Además, tanto el conjunto de Cantor como el triángulo de Sierpinski son conjuntos autosemejantes.



Construcción del conjunto de Cantor[8]

En $\mathbb{R}^n$, una semejanza de razón r es una aplicación $S:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple

$$|| S(x) - S(y) || = r \, || x - y ||,$$

en particular, S es un movimiento rígido compuesto con una homotecia de razón r. Además, dadas $S_1, \ldots, S_m$ semejanzas de razón $r > 0$, decimos que el conjunto F es autosemejante si

$$F = S_1(F) \cup \ldots \cup S_m(F).$$

De hecho, si $r < 1$, F es el único conjunto copacto autosemejante determinado por $S_1, \ldots, S_m$.

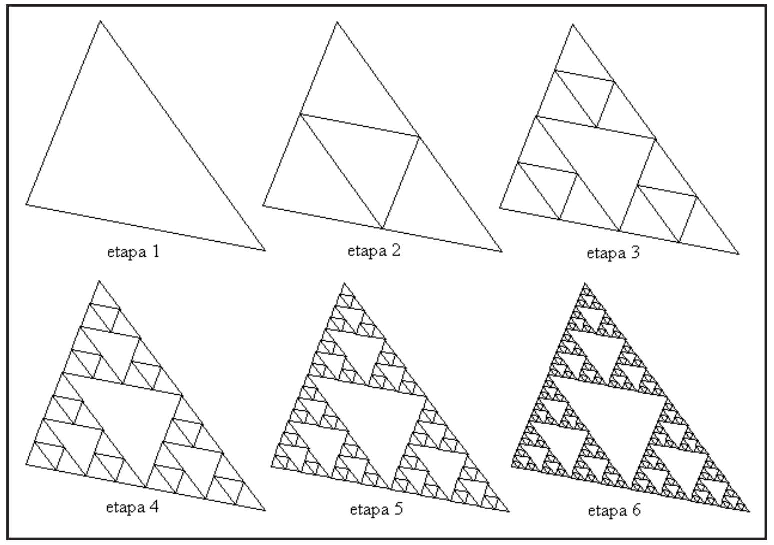
Visualmente, podemos entender los conjuntos autosemejantes como aquellos que contienen copias de sí mismos: el conjunto de Cantor está formado por dos copias más pequeñas de sí mismo, una en el intervalo [0, 1/3] y otra en [2/3, 1], el triángulo de Sierpinski por tres, y la curva de Von Koch por cuatro. Todos estos conjuntos autosemejantes son, en particular, fractales. Sin embargo, no todos los fractales son estrictamente conjuntos autosemejantes.

3. Historia y motivación

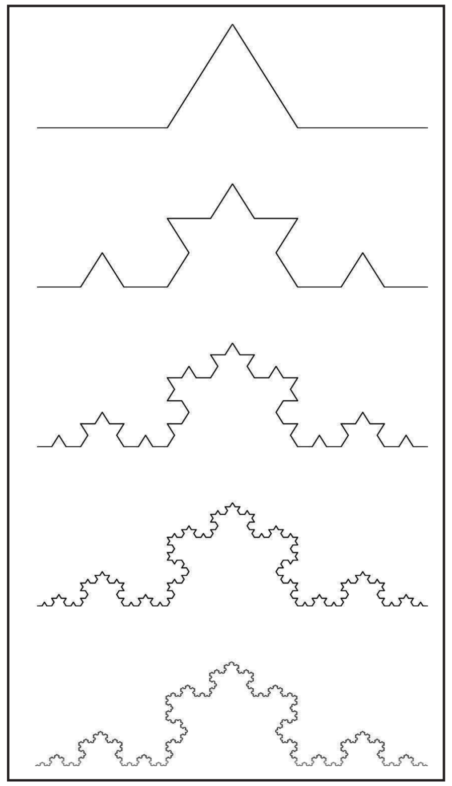
La definición de fractal que dio Mandelbrot[1], hoy en día resulta poco satisfactoria, ya que excluye conjuntos que son considerados fractales. Sin embargo, su visión al respecto era muy innovadora. Antiguamente los matemáticos habían ocupado su tiempo en el estudio de funciones y conjuntos mediante las herramientas clásicas del análisis. Los conjuntos que no eran suficientemente regulares (digamos, cuyo borde no era demasiado suave en alguna escala) habían sido descartados como patológicos. Muchos eran clasificados como curiosidades puntuales y su estudio no se había tomado en serio por la falta de métodos adecuados. La idea de Mandelbrot sugería no descartar estos conjuntos y desarrollar las herramientas adecuadas para estudiarlos en detalle. Para hacernos una idea más clara, veamos el ejemplo práctico en el que Mandelbrot ocupó parte de su tiempo. Si quisiésemos calcular el perímetro de Gran Bretaña, podríamos pensar en ir aproximando la forma de su costa con polígonos de manera cada vez más precisa. Para tener en cuenta hasta el más mínimo detalle, nuestro polígono final no podría ser una curva regular: la costa es suave en muy pocas zonas, y es especialmente irregular en la parte norte. La forma que obtendríamos tendría *picos* en casi todas partes y a escalas extremadamente pequeñas (es decir, seguiría habiendo picos tras observar el polígono con un potente zoom). ¿Qué necesitaríamos entonces para estudiar el polígono que hemos conseguido?

4. Dimensión

Mandelbrot observó que de los conjuntos autosemejantes es posible extraer una noción robusta de *regularidad*, más amplia que la que había hasta entonces. Sin embargo, estos conjuntos *patológicos* van mucho más allá de los conjuntos autosemejantes, y para estudiarlos todos es necesario tratar con otro concepto



Construcción del triángulo de Sierpinski[9]



Construcción de la curva de Von Koch[10] distinto a la regularidad y a la autosemejanza. Tenemos que hablar de la dimensión de un conjunto.

Para curvas, superficies y en general variedades suaves, el concepto de dimensión es sencillo o al menos intuitivo. Una línea tiene dimensión 1, una superficie, 2 y un objeto sólido, como por ejemplo un cubo, 3. Sin embargo, ¿cuál es, por ejemplo, la dimensión del triángulo de Sierpinski? ¿Tiene sentido plantearse la pregunta anterior? Podemos hacernos una idea heurística de cómo asignar una *dimensión* a conjuntos autosemejantes. Sigamos el ejemplo de un segmento, un cuadrado y un cubo, todos de lado 1. Los tres son conjuntos autosemejantes: el segmento está formado por dos copias de sí mismo de la mitad de longitud. El cuadrado está formado por cuatro copias de sí mismo, todas ellas tienen como lado la mitad del lado del cuadrado original. De manera análoga, el cubo está formado por ocho cubos cuyos lados son la mitad de largos que los del cubo original. Si establecemos que el número de copias que forman el objeto es m y r es la razón de la dilatación a la que sometemos el objeto para obtener sus copias (aquí $r = 1/2$), entonces en los tres casos, la dimensión del objeto viene dada por d en la expresión

$$mr^d = 1.$$

Si ingeniosamente utilizamos este argumento heurístico con el triángulo de Sierpinski, que se compone de 3 copias dilatadas por un factor de 1/2, obtenemos $d = \log 3/\log 2 \approx 1.585...$, y el conjunto de Cantor nos daría una "dimensión" de $d = \log 2/\log 3 \approx 0.631...$ Intuitivamente, tiene sentido decir que el triángulo de Sierpinski tiene dimensión menor o igual que 2, pues al fin y al cabo es un conjunto del plano. Por otro lado, ocupa más espacio que una curva pese a aparentar estar vacío, luego tiene sentido decir que su dimensión es mayor que 1. Lo mismo ocurre con el conjunto de Cantor, pues tiene medida nula en la recta real pero es un conjunto enormemente grande, tanto como la propia recta real. Lo cierto es que podemos definir un contexto en el cual esto tiene sentido, y para ello necesitamos introducir las medidas de Hausdorff, $\mathcal{H}^s$.

Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y cierto $s > 0$, podemos definir su medida exterior de Hausdorff s-dimensional como

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E),$$

donde

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{j \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_j)^s : E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j,\ \operatorname{diam} U_j < \delta\right\}$$

Conviene señalar, entre otras cosas, que esta cantidad siempre existe (y puede ser infinita), que los cubrimientos $\{U_j\}$ pueden tomarse por abiertos o por cerrados indistintamente, y que $\mathcal{H}^s$ es una medida sobre los conjuntos analíticos, y en particular sobre los de Borel[2].

Podemos interpretar la medida de Hausdorff como una medida dimensional. Es decir, si nosotros tomamos un conjunto E y una *dimensión* s $\mathcal{H}^s(E)$ nos devuelve la medida de E en dimensión s. Por ejemplo, si E es un cuadrado, deberíamos pedir que s sea 2. En caso contrario, el resultado que obtendremos no coincidiría con lo que nos dice la intuición. Una de las características más importantes de la medida de Hausdorff es que nos permite definir rigurosamente el concepto de dimensión de un conjunto. Con él se pueden justificar de una manera más razonable los razonamientos heurísticos que hemos dado antes. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos encontrar un único número real $s > 0$ para el cual

$$\mathcal{H}^t(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } t < s \\ 0 & \text{si } t > s. \end{cases}$$

Esto motiva la definición de la dimensión de E como tal número s. Al medir E en dimensiones menores, resulta ser demasiado grande, y si lo medimos en dimensiones mayores, resulta ser demasiado pequeño (de manera similar a como un segmento en el plano tiene medida 0). Finalmente, definimos la dimensión de Hausdorff de E como

$$\dim E = \inf\{t : \mathcal{H}^t(E) = 0\}.$$

Con esta definición se puede comprobar que las dimensiones que hemos calculado antes heurísticamente son, en efecto, las dimensiones de Hausdorff de los conjuntos indicados.

5. Definición de fractal

Llegados a este punto, podemos simplemente decir que el término *fractal* engloba a todos aquellos conjuntos cuya dimensión de Hausdorff es un número no entero. De ellos diremos que tienen dimensión fractal. Lo cierto es que esta definición no es la más utilizada a lo largo de todos los textos por excluir casos notables. En muchos se menciona la dimensión topológica del conjunto, y en otros muchos se requiere autosemejanza de algún tipo con el objetivo de incluir conjuntos que, teniendo dimensión entera, son irregulares a cualquier escala y también son fractales.

En su libro *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*[3], Kenneth J. Falconer propone interpretar la definición de *fractal* de manera similar a como un biólogo interpreta la definición de *vida*. No existe una definición inmediata y concreta, pero sí un conjunto de propiedades que la mayoría de los seres vivos cumplen, como la capacidad de reproducirse, desplazarse y existir hasta cierto punto independientemente del contexto en el que se encuentren. Naturalmente, existen excepciones a esta lista de propiedades. Para los fractales, es interesante contemplar los conjuntos que cumplen algunas de las propiedades siguientes, en lugar de dar una definición precisa que

probablemente excluya casos muy interesantes. Por tanto, cuando hablamos de un fractal F, tenemos en cuenta las siguientes características.

1. F tiene detalle en escalas arbitrariamente pequeñas.
2. F es demasiado poco regular como para estudiarlo con técnicas de análisis tradicionales.
3. A menudo F tiene alguna forma de autosemejanza, quizá aproximada o estadística.
4. A menudo la dimensión fractal de F es mayor que su dimensión topológica.
5. En muchos casos, la definición de F es simple, quizá recursiva.

6. Ejemplos

En la naturaleza podemos pensar en ejemplos como las costas de Gran Bretaña, Irlanda o Noruega, cuyas formas no son para nada suaves y ocupan mucho más espacio del que parece. Las convoluciones del cerebro, una bola de papel arrugada o la superficie del mar cuando está agitado son ejemplos de fractales naturales, que si bien no llegan a ser fractales matemáticos, su comportamiento puede ser descrito con más precisión mediante estos modelos, y cuyas dimensiones normalmente no son números enteros. En palabras del propio Mandelbrot:

"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta."[4]

Algunos de los ejemplos más curiosos de fractales en matemáticas surgen en el plano complejo a raíz del análisis de ciertas funciones holomorfas. Estudiando la convergencia de algunos sistemas de funciones iteradas es sencillo encontrar fractales. Los más comunes son los conjuntos de Julia, llamados así en honor al matemático francés Gaston Julia, que fue quien trabajó con ellos por primera vez.

Para definirlos, tomamos un polinomio, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, de grado $n \geq 2$, y denotamos por f^k la composición de f consigo mismo k veces. La frontera del conjunto

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : \exists R > 0, |f^k(z)| \leq R \ \ \forall k \in \mathbb{N}\},$$

a menudo llamado conjunto de Julia relleno, es el conjunto de Julia asociado a f, $J(f) = \partial K(f)$. Ambos conjuntos $J(f)$ y $K(f)$ son compactos, no vacíos, no numerables y de hecho $\overline{J(f)}$ tiene interior vacío, lo cual lo convierte en un conjunto diseminado (o de primera categoría), es decir, un conjunto muy pequeño desde un punto de vista topológico[5].

Es decir, dado un polinomio, f, su conjunto de Julia $J(f)$ es el borde de $K(f)$, que consiste en todos los puntos del plano complejo que no se disparan hacia fuera al aplicar f una vez tras otra. Estos conjuntos por lo general son fractales, y su dimensión depende del polinomio que tomemos.

En el caso especial en el que el polinomio f es de la forma

$$f_c(z) = z^2 + c$$

surge otro conjunto muy conocido que también es un fractal. Se trata del conjunto de Mandelbrot, que se define como

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ es conexo}\},$$

aunque también admite la siguiente definición, por lo general mucho más conocida y fácil de comprender,

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \exists R > 0, |f_c^k(0)| \leq R \ \ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Esta formulación permite generar imágenes digitales del conjunto de Mandelbrot de manera relativamente sencilla estudiando el módulo de cada $z \in \mathbb{C}$ para el que queremos comprobar si $z \in M$. Dichas imágenes sugieren que M tiene una forma muy complicada de entender. Además del cardioide central y sus réplicas más pequeñas, se extienden filamentos que a su vez contienen copias más pequeñas del conjunto total. El conjunto de Mandelbrot es conexo y tanto él como su frontera tienen dimensión 2, la misma que el propio plano complejo, lo que refleja su complejidad intrínseca[6]. Además, en función de en qué zona se encuentre c, su conjunto de Julia asociado, $J(f_c)$, tiene una forma u otra. Las formas más complejas se dan para valores de c que se encuentran en la frontera de M, e incluyen conjuntos formados por infinitas curvas que encierran regiones abiertas del plano o conjuntos que consisten en arillos encadenados unos con otros[7].

Referencias

1 B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company (1982), p. 15

2 E. M. STEIN, R. SAKARCHI, *Real Analysis*, Princeton Univerity Press (2005), p. 323-349

3 K. J. FALCONER, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John wiley & Sons (2003), p. 25

4 B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, Ibid, p. 1

5 K. J. FALCONER, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Ibid, p. 222

6 K. J. FALCONER, Ibid, p. 227

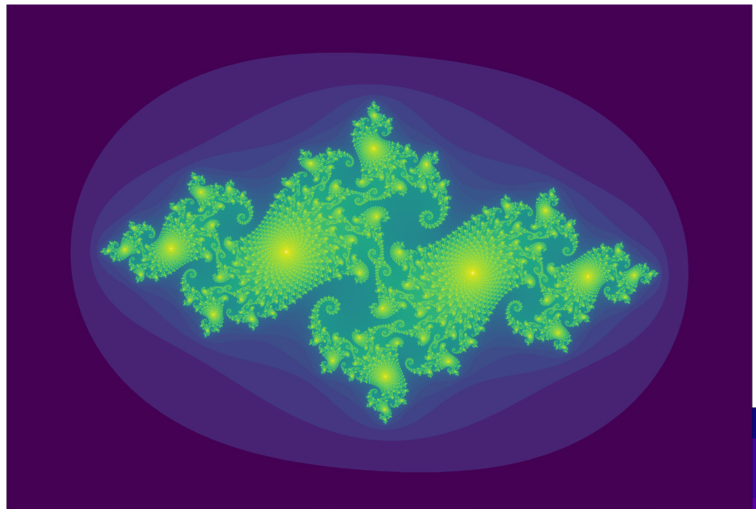
7 K. J. FALCONER, Ibid p. 232

8 SCHMIDKTE, M.Romero, https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor#/media/Archivo:Conjunto_de_Cantor.png, 7 diciembre 2005, Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0)

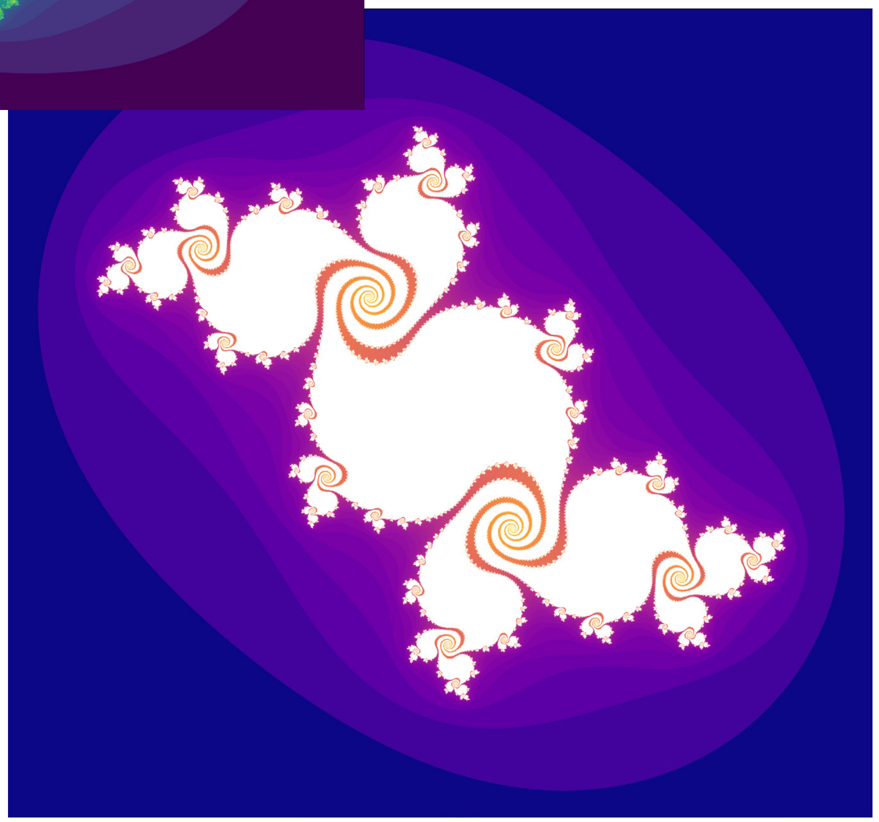
9 SCHMIDKTE, Romero, https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_de_Sierpinski#/media/Archivo:Sierpinski_segmentos.png, 11 noviembre 2003, Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-WSA 3.0)

10 CDANG. DANG NGOC CHAN, Christophe, https://es.wikipedia.org/wiki/Copo_de_nieve_de_Koch#/media/Archivo:Von_koch_2_etapes.svg, junio 2006, Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0)

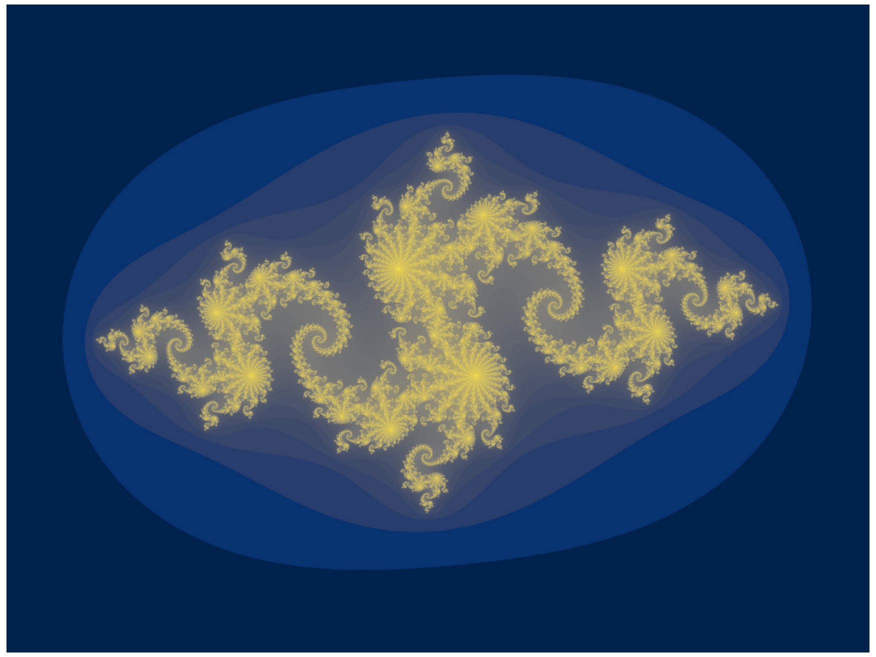
Dibujo de Gran Bretaña: ALPHATHON, https://es.wikipedia.org/wiki/Gran_Breta%C3%B1a#/media/Archivo:England,_Scotland_and_Wales_within_the_UK_and_Europe.svg, 21 mayo 2014, Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0)



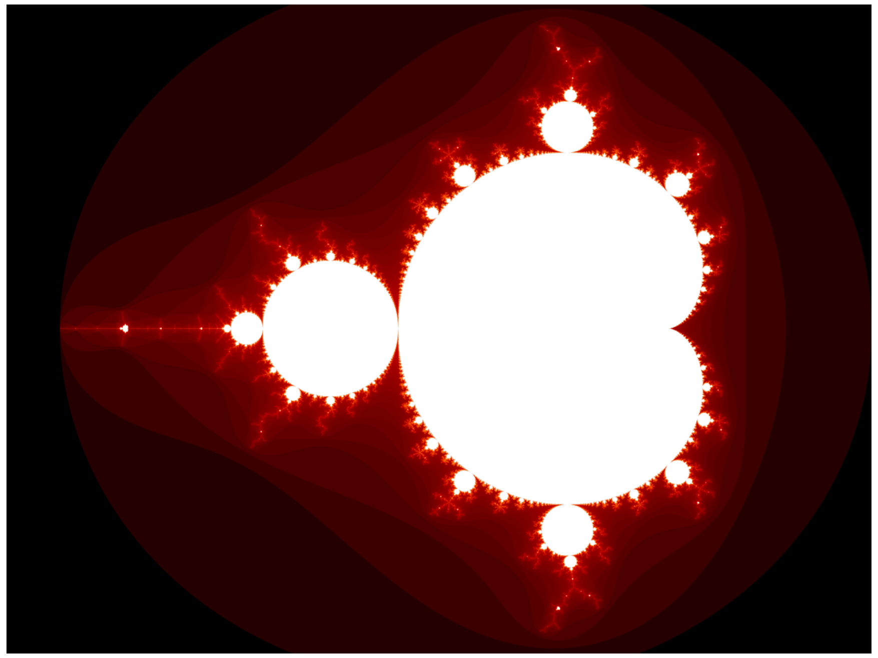
Conjunto de Julia relleno para c = −0,75+ 0,11i



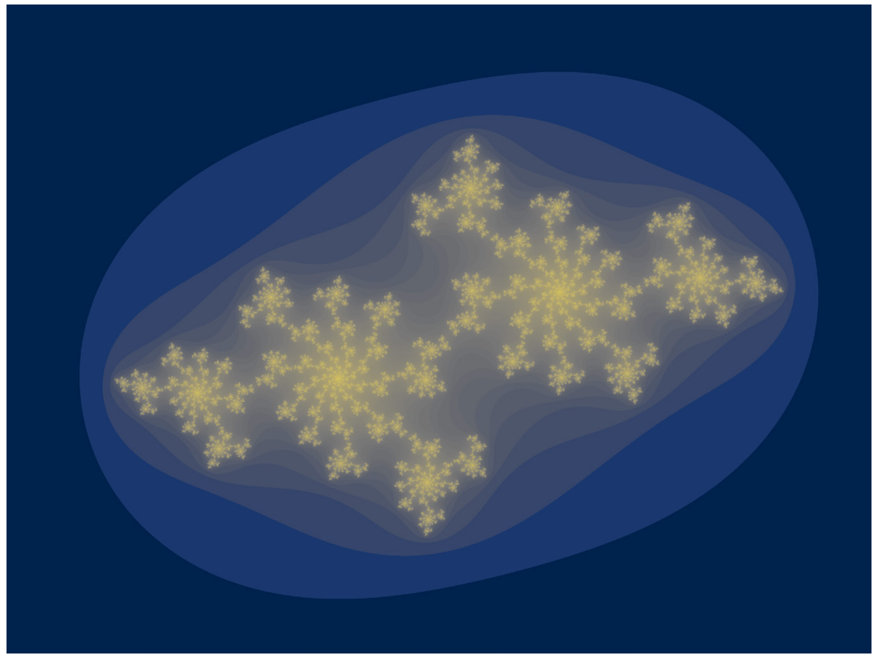
Conjunto de Julia relleno para c = −0,15 + 0,66i



Conjunto de Julia relleno para c = −0,8 + 0,16i



Conjunto de Mandelbrot



Conjunto de Julia relleno para c = −0,7− 0,38i

Una breve aproximación al código nazi

Enigma

Criptografía,

una de las grandes protagonistas de la Segunda Guerra Mundial

Por Pablo Mancheño Roa
Ilustraciones de Carla Moreno Basteiro

Dedicado a mi abuelo Pepe.

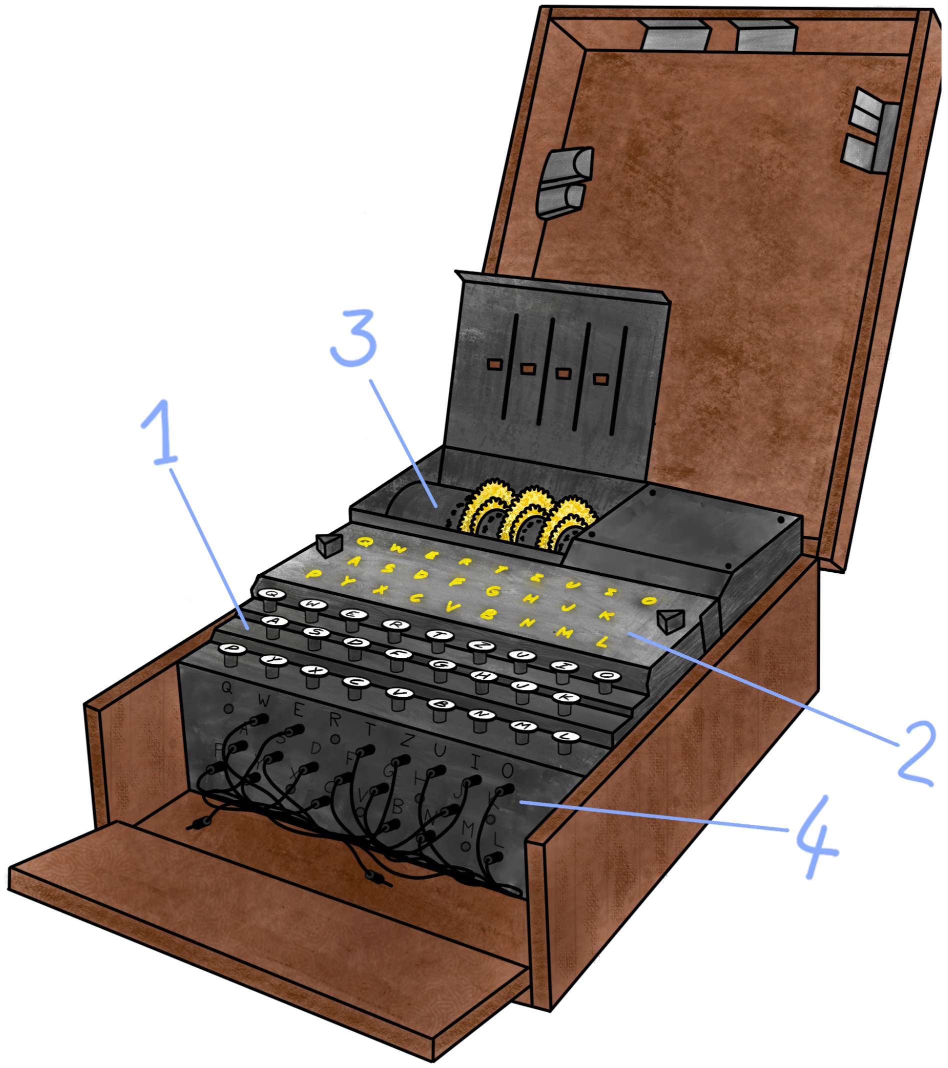
En ocasiones queremos que determinada información se almacene de forma segura, o nos interesa que llegue a un destinatario sin que en el camino caiga en manos no deseadas. Esta necesidad de proteger la información ya existía en las civilizaciones clásicas y, desde entonces, se han desarrollado métodos cada vez más sofisticados para lograr ese objetivo. La ciencia (o rama conjunta de la matemática e informática) que se encarga de diseñar y estudiar dichos métodos se conoce como criptografía. En este artículo no vamos a hablar de la criptografía actual ni de las prometedoras tendencias futuras (e.g. criptografía cuántica), sino de la máquina de cifrado por antonomasia: Enigma. Una vez hayamos explicado los componentes y el funcionamiento de la misma, podremos hacer un sencillo ejercicio de matemática discreta que espero resulte didáctico y entretenido.

Recién finalizada la Gran Guerra, el ingeniero alemán Arthur Scherbius desarrolló una máquina para la encriptación de datos inicialmente bancarios y empresariales, pero que en 1925 fue adoptada por el ejército alemán para la comunicación de información militar[2]. La máquina, cuyo nombre podría haber sido tomado del título de la obra *Enigma Variations* del compositor británico Edwar Elgar, se empleó antes y durante el desarrollo de la Segunda Guerra Mundial, por lo que romper el sistema de cifrado se convirtió en una de las más altas prioridades de las potencias aliadas enfrentadas a la Alemania nazi[1]. Aunque se emplearon distintos modelos con algunas diferencias notables, aquí vamos a hablar del funcionamiento genérico común a todas las versiones.

1. Partes de la máquina enigma

Con una apariencia similar a la de una máquina de escribir, Enigma estaba compuesta por cuatro partes principales:

1. **Teclado.** En él se escribían el texto en claro (mensaje a encriptar) y el criptograma (mensaje encriptado) para convertir uno en el otro y viceversa.
2. **Panel de lámparas.** Es aquí donde se indica la letra por la que se codifica la introducida en el teclado.
3. **Mecanismo de cifrado.** Es el corazón de la máquina, ya que es en él donde se produce el proceso de cifrado, y está compuesto por tres rotores y un reflector. Tanto un rotor como un reflector son un disco con 26 posiciones (cada una de las letras del alfabeto) con conexiones internas entre ellas, pero tienen nombres distintos ya que existen diferencias en su estructura y principalmente en su funcionamiento (que veremos con más detalle más adelante). Para aumentar la seguridad, existían varios reflectores y rotores diferentes (distintas conexiones internas).
4. **Clavijero.** En él aparecen las letras del alfabeto, que se pueden conectar entre sí mediante cables para intercambiarlas antes de que el mecanismo de cifrado las codifique.



La máquina Enigma, usada en la Segunda Guerra Mundial por la Armada Alemana para codificar y descodificar mensajes.

2. ¿Cómo funciona?

La manera en la que Enigma encripta un mensaje es sustituyendo cada letra que aparece en él por otra (no necesariamente distinta a la original), de manera que el resultado es un mensaje ininteligible. Veamos por encima entonces qué recorrido sigue una letra, por ejemplo la *M*, para convertirse en otra. En primer lugar, al pulsar la tecla M del teclado se manda una corriente eléctrica que va al clavijero. Allí, si la letra M está conectada mediante un cable a cualquier otra, entonces Enigma lo que hará será codificar esa otra letra, y si no, codifica la M directamente. Supongamos que la M está conectada a la letra C en el clavijero. Como la C ocupa la tercera posición del alfabeto, entonces la corriente sigue su camino hasta la tercera posición del primero de los tres rotores, que supongamos es una J. Internamente en este rotor, la J supongamos está conectada con la letra L, y como la letra L ocupa la posición 12 del alfabeto, entonces la corriente va a la posición 12 del segundo rotor, donde habrá otra letra. Este mismo proceso tiene lugar en los dos siguientes rotores hasta llegar al reflector, donde este, como su propio nombre indica, refleja la corriente de vuelta a los rotores, no sin antes haber cambiado la letra que le llegue por otra (que dependerá del reflector que estemos usando). Así, la corriente sigue su camino de vuelta por los rotores (esta vez se recorren en sentido contrario) donde siguen cambiándose letras unas por otras en función de su posición en el alfabeto, de la posición del rotor y de las conexiones internas de los rotores. Finalmente, al salir la corriente por el primer rotor, esta se manda al clavijero para hacer un último cambio de letras si existiese tal conexión mediante un cable, y de ahí al panel de lámparas donde se iluminará la letra final que codifica a la M, pongamos que es una R.[2]

▼ Alan Turing (1912-1954)

Más formalmente, podemos decir lo siguiente. Sea $\mathfrak{A}$ el alfabeto de 26 letras. Definimos la función Enigma $\mathbb{E}$, que aplica $\mathfrak{A}$ en sí mismo, y la escribimos como producto de permutaciones. Sean $a, x \in \mathfrak{A}$ las letras original y encriptada, respectivamente; y sean C, D, M, I y R las transformaciones del clavijero, del rotor derecho, central e izquierdo, y del reflector, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\colon \mathfrak{A} &\longrightarrow \mathfrak{A} \\ a &\longmapsto x = \mathbb{E}(a) = C^{-1}D^{-1}M^{-1}I^{-1}RIMDC(a) \end{aligned}$$

Para codificar entonces un mensaje entero, sólo habría que teclearlo letra a letra y Enigma nos devolverá por cada letra introducida la letra por la que se codifica. Sin embargo, podría preguntarse el lector, qué seguridad hay en el sistema si cada vez que pulsemos la letra M, Enigma la codificará por una R, de manera que con un poco de esfuerzo (tal vez con *análisis de frecuencias*), pueda revelarse la correspondencia de letras. Pues bien, aquí reside el interés de esta máquina, y es que una misma letra se codifica cada vez por otra distinta. Es decir, si pulsamos la letra M tres veces seguidas, primero se iluminará la R, luego la O, y luego la V, por ejemplo. Esto se consigue de la siguiente manera: cada vez que se codifica una letra, el primer rotor gira una posición, de manera que como hemos visto en el ejemplo, si la letra que ocupaba la tercera posición era una J, ahora será una K. Es más, cuando se hayan codificado 26 letras, y por tanto el primer rotor haya girado 26 veces (una vuelta completa), el segundo rotor girará una vez; y cuando este haya girado 26 veces, el tercer rotor girará también. Es una idea similar a la de las manecillas de los segundos, minutos y horas en un reloj.

Por lo tanto, el hecho de que al teclear un mensaje obtengamos un criptograma u otro dependerá de la configuración inicial de la máquina: conexiones en el clavijero, qué rotores se usan, en qué orden, cuál es su posición inicial, y qué reflector se usa. Esta configuración era conocida como la *clave* de la máquina. Para más seguridad, la clave cambiaba cada día, y para saber qué clave utilizar, desde Berlín se enviaban unos cuadernillos mensualmente a los frentes de combate donde se especificaba esta información. Para poder desencriptar un mensaje lo que había que hacer era simplemente configurar la máquina Enigma de la misma manera en la que se había codificado el mensaje y teclear el criptograma. Esto es así ya que al haber definido $\mathbb{E}$ como se indica arriba, entonces se tiene que la inversa $\mathbb{E}^{-1}$ coincide con $\mathbb{E}$, es decir, $\mathbb{E}^{-1} = \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{-1}\colon \mathfrak{A} &\longrightarrow \mathfrak{A} \\ x &\longmapsto \mathbb{E}^{-1}(x) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}^{-1}(x) = (C^{-1}D^{-1}M^{-1}I^{-1}RIMDC)^{-1}(x) =$$
$$C^{-1}D^{-1}M^{-1}I^{-1}R^{-1}(I^{-1})^{-1}(M^{-1})^{-1}(D^{-1})^{-1}(C^{-1})^{-1}(x) =$$
$$C^{-1}D^{-1}M^{-1}I^{-1}RIMDC(x) = \mathbb{E}(x)$$

(donde hemos usado que $R^{-1} = R$ por el funcionamiento de un reflector). En consecuencia, la composición de $\mathbb{E}$ consigo misma aplicada a una letra a será la identidad, ya que $id_{\mathfrak{A}} = \mathbb{E}^{-1} \circ \mathbb{E} = \mathbb{E} \circ \mathbb{E} = \mathbb{E}^2$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A} & \xrightarrow{\mathbb{E}} & \mathfrak{A} & \xrightarrow{\mathbb{E}} & \mathfrak{A} \\ a & \longmapsto & \mathbb{E}(a) = x & \longmapsto & \mathbb{E}(x) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(a)) \end{array}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(a)) =$$
$$C^{-1}D^{-1}M^{-1}I^{-1}RIMDC(C^{-1}D^{-1}M^{-1}I^{-1}RIMDC(a)) =$$
$$a.$$

3. Número de claves.

Conociendo los factores que intervienen en la encriptación del mensaje, nos planteamos el siguiente problema: **¿cuál es el número de claves posibles?** Tendremos que aplicar los principios más básicos de la combinatoria, y para ello conviene recordar lo siguiente. Por un lado, el *número combinatorio* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ cuenta el número de subconjuntos de k elementos que podemos extraer de un conjunto de *n* elementos; o lo que es lo mismo, el número de maneras distintas de seleccionar *k* elementos de un conjunto de *n* elementos. Por otro lado, la *regla del producto* describe un procedimiento que nos permite contar el número de elementos que conforman un conjunto, construyéndolos paso a paso para posteriormente hacer una multiplicación. En este caso, la regla la aplicamos obteniendo el número de claves posibles que introduce cada variable de las enumeradas más arriba para por último multiplicarlos todos. En primer lugar, pongamos que el número de reflectores que tenemos disponibles es 3, y de entre ellos tenemos que elegir tan sólo 1, es decir, hay $\binom{3}{1}$ formas distintas de elegir el reflector. Por su parte, pongamos que disponemos de 5 rotores, pero tenemos que seleccionar tan sólo tres de ellos, y además importa en qué orden lo hagamos. El número de formas distintas de seleccionar tres elementos de un conjunto de 5 es precisamente $\binom{5}{3}$, y por cada uno de ellos, el número de formas distintas de colocar tres elementos en tres huecos, de manera que cada elemento vaya a un hueco distinto (biyecciones de un conjunto en sí mismo, o más comúnmente, permutaciones) es precisamente 3!. Una vez fijados el reflector, los rotores y su orden, tenemos que elegir sus posiciones iniciales. Por cada una de las 26 posibilidades para el primer rotor hay otras 26 para el segundo, y para cada una de estas hay otras 26 para el tercero, por lo que tenemos, por la regla del producto, 26^3 posiciones iniciales.

Por último, el cálculo más interesante es el de las formas de configurar el clavijero. Pongamos que tenemos seis cables indistinguibles (cada uno intercambia dos letras entre sí), y que tenemos que utilizar los seis siempre. Para hacer la cuenta tendremos que introducir un elemento que nos facilita el cálculo pero que es erróneo y al final tendremos que corregir: vamos a numerar los cables. Es decir, realmente los cables son indistinguibles, pero ahora vamos a considerar que hay uno que es el número uno, otro el dos y así hasta el seis. Este orden espurio lo podemos corregir al final del cálculo dividiendo el resultado que obtengamos entre el número de formas de ordenar estos cables, es decir, entre 6!, devolviendo al anonimato a cada uno de ellos.

Esto es porque, por ejemplo, el resultado:

cable 1: (a,b), cable 2:(c,d), cable 3: (e,f),
cable 4: (g,h), cable 5: (i,j), cable 6: (k,l).

es el mismo que, por ejemplo, el resultado:

cable 1: (c,d), cable2: (a,b), cable 3: (k,l),
cable 4: (g,h), cable 5: (i,j), cable 6:(e,f).

Comencemos: de entre las 26 letras posibles, tenemos que elegir dos para que las una el cable número uno, y este número es precisamente $\binom{26}{2}$. Por cada uno de estos dos pares de letras unidos por el cable número 1, tedremos que elegir entre las 24 letras restantes otras 2 para que las una el cable número dos, que son $\binom{24}{2}$. Es decir, llevamos contadas $\binom{26}{2}\binom{24}{2}$ posibilidades. Este argumento lo reiteramos para los seis cables que tenemos, y obtenemos el siguiente número:

$$\prod_{j=0}^{5}\binom{26-2j}{2}=$$

$$\frac{26!}{2\cdot(26-2\cdot 1)!}\cdot\frac{(26-2\cdot 1)!}{2\cdot(26-2\cdot 2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(26-2\cdot 5)!}{(26-2\cdot 6)!}=$$

$$\frac{26!}{2^6\cdot(26-2\cdot 6)!}$$

Multiplicamos este número por el 1/6! que prometimos al comienzo, y obtenemos 100.391.791.500 posibles combinaciones en el clavijero.

Habiendo obtenido todas estas cantidades, para obtener el número de claves posibles ahora sólo falta, como indica la regla del producto, multiplicarlas:

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 3!\cdot 26^3\cdot\frac{1}{6!}\cdot\frac{26!}{2^6\cdot(26-2\cdot 6)!}$$

que para que lo entendamos, es la vertiginosa cifra de 317.607.502.932.720.000 claves posibles, es decir, más de 300 millones de millones de millones, lo que otorgaba bastante confianza al mando alemán sobre la confidencialidad de sus mensajes. Sin embargo, el código Enigma fue roto hasta en dos ocasiones. En primer lugar, antes del estallido de la guerra, los polacos, conscientes de la situación, establecieron un equipo de criptoanalistas, el Byuro Szyfrów, en el que destaca la figura del matemático Marian Rejewski. Consiguieron descubrir su funcionamiento y desarrollaron una máquina, a la que bautizaron como *Bomba*, capaz de desencriptar las comunicaciones alemanas. Al introducir los alemanes mejoras en Enigma y tras la invasión de Polonia, los británicos tomaron el relevo[1]. Reunieron a sus mejores matemáticos en Bletchley Park, y liderados por Alan Turing y basándose en sus trabajos relacionados con la llamada *máquina de Turing*, consiguieron desarrollar una máquina, llamada también *Bomba* (aunque totalmente distinta a la polaca), que consiguió definitivamente romper el código Enigma. Alan Turing es considerado hoy en día uno de los padres de las ciencias de la computación y el principal precursor de la Informática[2].

Recomendaciones

Para concluir, quisiera hacer unas recomendaciones a aquellos lectores más interesados en el tema. Por una lado, la película de 2014 *Descifrando Enigma* (*The Imitation Game*) muestra los trabajos realizados por el servicio de inteligencia británico en Bletchley Park, centrándose en el papel de Alan Turing, interpretado por Benedict Cumberbatch. Por otro lado, existe una gran cantidad de simuladores online de Enigma, como los que se encuentran en las direcciones https://www.cryptool.org/en/cto/enigma-step-by-step y https://summersidemakerspace.ca/projects/enigma-machine/, con los que el lector puede probar a encriptar sus propios mensajes.

Referencias

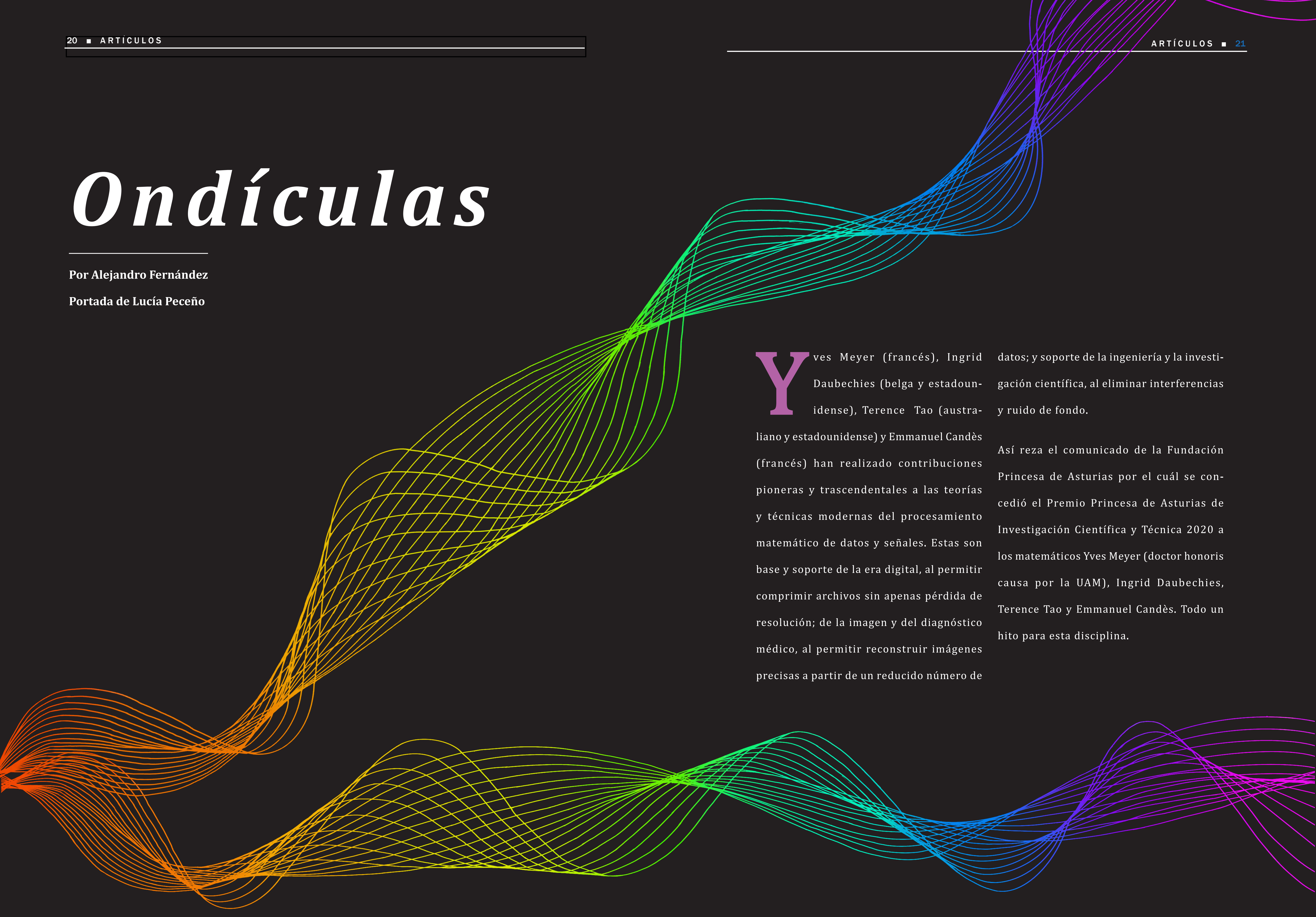
1 J. GÓMEZ URGELLÉS, *Matemáticas y códigos secretos*, Ciencia, National Geographic, RBA, Barcelona (2018), pp. 68-81.
2 L. HERNÁNDEZ ENCINAS, *La criptografía, ¿Qué sabemos de?*, 69, CSIC, Catarata, Madrid (2016), pp. 54-67.
3 CrypTool-Online (2021). Enigma (step-by-step). https://www.cryptool.org/en/cto/enigma-step-by-step
4 Enigma machine, Design, Mathematical analysis [En Wikipedia]. Recuperado (2021, Septiembre 2) de https://en.wikipedia.org/wiki/Enigma-machine

Este texto inteligible es un ejemplo de criptograma que se puede obtener con Enigma. Animo al lector a tratar de descifrarlo, haciendo uso del segundo software (Summerside Makerspace) que aparece en la sección Recomendaciones, con la siguiente configuración de la máquina: [Enigma Machine Version: Enigma N4 (Navy); Plugboard Uhr: No; Reflector: D; Slow Rotor: I, Ring A, First letter: A; Middle Rotor: III, Ring B, First letter: A; Fast Rotor: V, Ring C, First letter: A; Plugboard: (A,J), (E,F), (M,R), (P,X)].

Ondículas

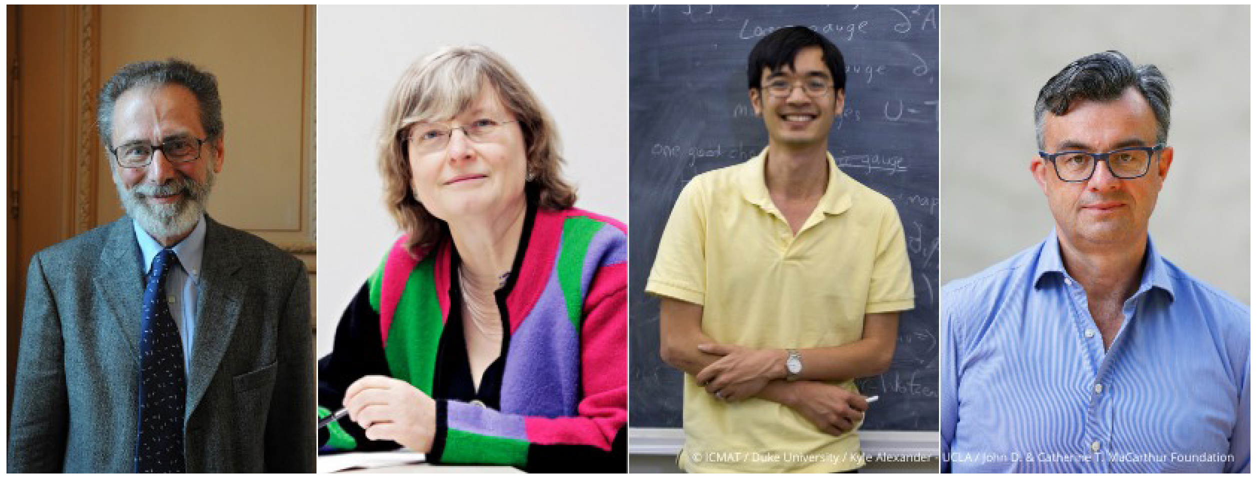
Por Alejandro Fernández

Portada de Lucía Peceño



Yves Meyer (francés), Ingrid Daubechies (belga y estadounidense), Terence Tao (australiano y estadounidense) y Emmanuel Candès (francés) han realizado contribuciones pioneras y trascendentales a las teorías y técnicas modernas del procesamiento matemático de datos y señales. Estas son base y soporte de la era digital, al permitir comprimir archivos sin apenas pérdida de resolución; de la imagen y del diagnóstico médico, al permitir reconstruir imágenes precisas a partir de un reducido número de datos; y soporte de la ingeniería y la investigación científica, al eliminar interferencias y ruido de fondo.

Así reza el comunicado de la Fundación Princesa de Asturias por el cuál se concedió el Premio Princesa de Asturias de Investigación Científica y Técnica 2020 a los matemáticos Yves Meyer (doctor honoris causa por la UAM), Ingrid Daubechies, Terence Tao y Emmanuel Candès. Todo un hito para esta disciplina.



Fotografía los premiados tomada de la Fundación Princesa de Asturias.
De izquierda a derecha, Meyer, Daubechies, Tao y Candès.

Pero, ¿qué hicieron exactamente? Bien, la respuesta tiene que ver con algo conocido como teoría de ondículas, de gran importancia porque consigue dividir imágenes y sonidos en objetos matemáticos más pequeños y manejables, pero manteniendo los detalles con precisión, eliminando ruidos e interferencias, comprimiendo sin apenas pérdida de calidad.

Los pioneros fueron Meyer y Daubechies (al primero, las ondículas le hicieron merecedor del Premio Abel en 2017) y, más adelante, Tao y Candès completarían su trabajo con estudios relacionados con la teoría del *compressed sensing*, permitiendo la reconstrucción eficiente de datos dispersos basados en muy pocas mediciones. Las aplicaciones son muchas y de gran relevancia para nuestra vida cotidiana: procesamiento de imágenes, reconocimiento de voz, múltiples campos de la medicina, geofísica o astrofísica entre otras. Por todo esto, queremos que este breve artículo sirva de introducción a una de las ramas de las matemáticas de mayor actualidad.

El Descubrimiento.

La historia del origen de estos artefactos matemáticos resulta, cuando menos, curiosa. Yves Meyer estaba esperando a que uno de sus colegas de la École Polytechnique terminara de fotocopiar un artículo de Jean Morlet y Alex Grossmann (de Marsella) sobre una nueva técnica para descomponer las señales sísmicas complejas registradas en los terremotos. Meyer cogió una copia de este artículo y se percató de que contenía elementos similares a teorías de descomposición de funciones de Análisis Armónico (su rama de especialización en ese momento). Ese mismo día tomó el tren a Marsella para conocer a los autores y, a partir de ahí, el resto es historia. Las ondículas, resultado final de esta intrigante anécdota, se convirtieron en una teoría que ha inspirado muchos trabajos de matemáticos, físicos e ingenieros durante los últimos años.

Llegados a este punto, probablemente te estés preguntando qué son o en qué consisten exactamente estas *ondículas*. Pero antes debemos introducir un concepto del que seguramente hayas oído hablar en algún momento: las series de Fourier (y si no, no pasa nada porque te lo explicamos aquí).

El objetivo de las series de Fourier es aproximar funciones por medio de senos y cosenos. Es muy fácil, tomamos una función f periódica con periodo T, es decir, $f(x)=f(x+T)$ para todo x real, y damos una aproximación en un intervalo de longitud T.

Reproduciendo a continuación este intervalo por toda la recta real, obtenemos una aproximación final.

Sea s_N la serie formada por los elementos:

$$s_N(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]$$

con:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt$$
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

llamados los coeficientes de Fourier.

Ahora bien, si ya teníamos una expresión de f ¿por qué usar otra más complicada? ¿Qué ventajas ofrece?

La serie s_N converge a f en casi todo punto[1], es decir, cuanto más grande sea N (y, por tanto, más términos de la serie de Fourier usemos), más se parecerá f a s_N. Esto es importante sobre todo para almacenar funciones y trabajar con ellas computacionalmente de forma mucho más eficiente. En vez de tener que guardar el valor de la función en los puntos, basta con que guardemos un puñado de puntos para tener una muy buena aproximación de f con la que poder trabajar y, por ende, consumimos mucha menos memoria del ordenador.

El problema es que el diablo vive en los pequeños detalles y esta no es una excepción, por desgracia...

Que s_N converja a f no nos dice nada sobre la velocidad de esta, puede que tengamos una aproximación decente de f para $N=10$ o que tengamos que esperar hasta $N=1.000.000.000.000$ y, claro, si tenemos que esperar hasta coeficientes tan altos, esta idea tan maravillosa de Fourier se vuelve incapaz de ayudarnos con el almacenaje de datos.

En particular, las series de Fourier son sumas de senos y cosenos, funciones *demasiado suaves*. Por esta razón, cuando las funciones tienen algún punto muy *picudo* se necesitan demasiados pasos hasta que la serie de Fourier dé aproximaciones decentes de f, perdiéndose inevitablemente mucha información.

La pregunta clave que surge ahora, después de todos estos razonamientos, es la siguiente: si cambiamos el tipo de curvas y en vez de usar senos y cosenos recurrimos a otras, ¿podríamos corregir este inconveniente?

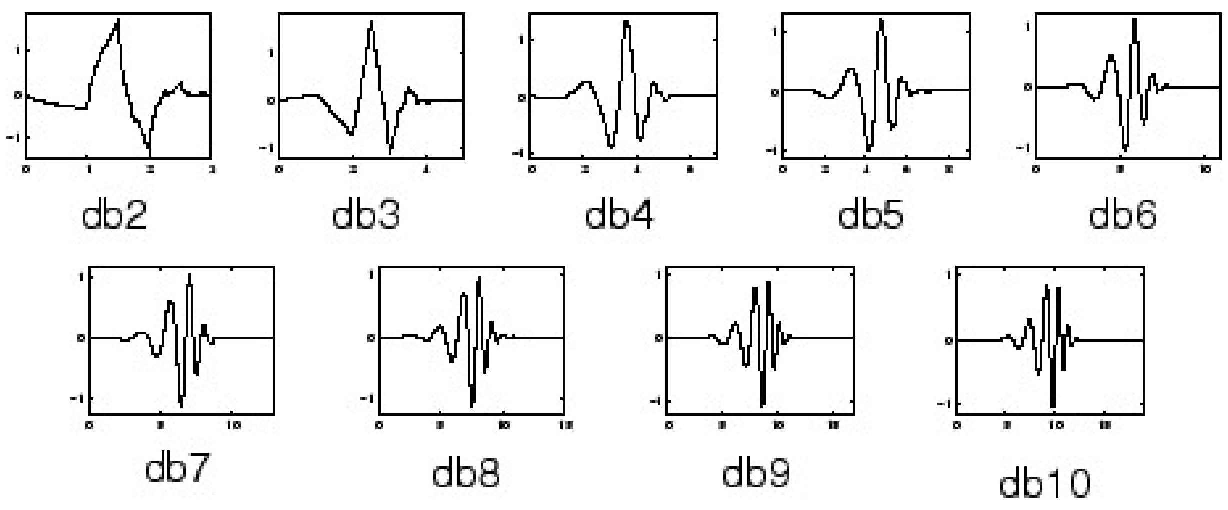
Las ondículas pretenden dar la solución. En la década de los 80 Meyer construyó el primer ejemplo de ondículas no-triviales, continuamente diferenciables. Dos años después, Daubechies consiguió describir una familia de ondículas que formaban una base de funciones ortonormales con soporte compacto o, en cristiano, la matemática, si no hizo magia, cerca se quedó. Resultados muy elegantes, que constituyen el pilar de las ondículas hoy en día y resuelven el problema que planteábamos.

Por ejemplo, usando las ondículas de Daubechies dbn, dilatándolas y trasladándolas apropiadamente para que estas formen una base, un tecnicismo necesario para poder abarcar todo el rango de funciones que necesitamos, estaríamos expresando nuestra función como una serie que depende de los elementos dbn y no de los

$$\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

como teníamos en el modelo de Fourier. Con las dbn nos referimos a la familia de curvas que se puede ver en la figura de la siguiente página.

Acto de investidura de Yves Meyer como Doctor Honoris Causa en la Universidad Autónoma de Madrid, el 6 de junio del año 1997. De izquierda a derecha, Adolfo Quirós, Julián de la Horra, José García-Cuerva, Ireneo Peral, Alberto PedroCalderón, Antonio Córdoba, Yves Meyer, Miguel de Guzmán y Santiago Carrillo. Fotografía cedida por el Departamento de Matemáticas de la UAM.



Familia de ondículas Daubechies *dbn.*

Compressed sensing.

Al comienzo de este texto decíamos que la teoría de ondículas permitía dividir imágenes y sonidos en objetos matemáticos manejables. Esto se consigue gracias al *compressed sensing*, o muestreo comprimido, una de las aplicaciones más relevantes de las ondículas en nuestro día a día.

Fruto de la colaboración entre Terence Tao y Emmanuel Candès (entre otros), durante la primera década del siglo XXI se produjo una revolución en las técnicas de tratamiento de datos y señales gracias al desarrollo del *compressed sensing*. Esta teoría es especialmente útil porque permite la reconstrucción eficiente de datos dispersos basados en muy pocas mediciones.

En este artículo queremos explicar cómo funciona esta técnica. Para poder centrarnos en la idea que hay detrás de ella y no perdernos en los tecnicismos, vamos a tomar el ejemplo más sencillo, el de la cámara.

El objetivo de una cámara es, por supuesto, hacer fotos. Ahora bien, es una práctica común que la cámara comprima la imagen. Por ejemplo, si el tamaño inicial de la fotografía es de 2MB sería preferible quedarse con algo que ocupe menos, por ejemplo 200KB, que es un 10% del tamaño inicial.

La clave detrás de esta idea es que, mientras el espacio de todas las imágenes tiene un valor de 2MB de *grados de libertad*, el espacio de todas las imágenes *interesantes* (las partes que contienen los detalles relevantes de la fotografía) es mucho más pequeño y puede almacenarse en un espacio considerablemente menor, si a uno no le importa perder un poco de calidad.

Desde luego, existen varias formas de comprimir imágenes. Empecemos con una un poco ingenua. Supongamos que en nuestra fotografía encontramos un cuadrado monocromático muy grande, por ejemplo de 100x100 píxeles, que son exactamente del mismo color. Si no hiciéramos ninguna compresión, usando una escala de grises 8-bit, almacenar toda la información de este cuadrado requerirían 10.000 bytes cuando, lo único que necesitaríamos, es almacenar la dimensión, la localización y el color usados (que es mucha menos información). Por supuesto, esta idea no nos serviría en la práctica pues no consigue dar resultados satisfactorios para las transiciones abruptas entre dos colores.

En realidad, para resolver este problema en la comunidad científica se ha llegado al consenso de que es mejor no trabajar usando el color medio de cada cuadradito, sino que lo más óptimo es utilizar los *desequilibrios* medios. Esto es, de media, cuán más intensa es la mitad derecha del cuadradito en comparación con la mitad izquierda del mismo. Y esto resulta que se puede formalizar utilizando sistemas de ondículas, que nos permiten expresar una imagen como la superposición lineal de varias ondículas. En la práctica, se utilizan técnicas más complejas, pero esto es suficiente para entender las ideas detrás del *compressed sensing*.

Visto esto, volvamos a nuestro ejemplo anterior. La imagen original tiene 2 millones de grados de libertad y, en particular, si uno quiere expresar esta imagen en términos de ondículas, necesitaría 2 millones de ondículas diferentes para poder reconstruirla perfectamente. No obstante, una imagen típica *interesante* es muy *dispersa* en una base de ondículas. Es muy posible que no necesitemos más de unas 100.000 ondículas para poder capturar todas las características importantes de la imagen, y que el 1.9 millón de ondículas restantes tan solo contribuyan a una pequeña cantidad de ruido aleatorio, imperceptible para la mayoría de los observadores.

Ahora, si nosotros (o la cámara) supiéramos cuáles son los 100.000 coeficientes de las ondículas que vamos a utilizar, entonces la cámara podría simplemente medir el valor de sólo esos coeficientes y ni siquiera molestarse en intentar obtener el resto. Es posible medir un único coeficiente aplicando un filtro adecuado a la imagen y haciendo una medida de una única intensidad del resultado obtenido. No obstante, la cámara no conoce a priori cuáles son los coeficientes claves, así que tiene que obtener los 2 millones de píxeles, convertir la imagen a una base de ondículas, localizar los 100.000 coeficientes dominantes, almacenarlos y desechar el resto. Este es el momento en el que las matemáticas obran un discreto milagro.

Con esto en mente, la filosofía principal del *compressed sensing* es esta: si uno necesita sólo 100.000 coeficientes para recuperar la mayor parte de la imagen, ¿por qué no tomar solo 100.000 medidas en lugar de 2 millones? En la práctica se deja un margen de seguridad tomando, por ejemplo, 300.000 medidas. Claro, existe una dificultad evidente, tal y como decíamos antes, la cámara no sabe de antemano qué 100.000 coeficientes de los 2 millones que hay son los importantes que se necesitan guardar. De esta forma, una pregunta que resulta muy interesante es saber qué ocurriría al seleccionar un conjunto completamente diferente de 100.000 (ó 300.000) ondículas. ¿Se perdería toda la información interesante en la imagen?

La solución a esta pregunta es simple y poco intuitiva. Consiste en hacer 300.000 medidas que no tengan nada que ver con la base de ondículas. La idea es generar medidas *pseudo-aleatorias*, generando al azar 300.000 imágenes, *máscaras*, y midiendo hasta qué punto se parece a las máscaras la imagen con la que estamos trabajando. Ahora, estas medidas (o *correlaciones*) entre la imagen y las máscaras serán, con casi toda seguridad, muy pequeñas e impredecibles. Sin embargo, cada una de las 2 millones de ondículas que comprimen la imagen generará su propia *firma* distintiva dentro de estas medidas aleatorias y, además, (con una probabilidad desorbitadamente alta) cada una de las firmas será distinta. Resulta que la combinación lineal de hasta 100.000 de estas firmas serán distintas. Desde la perspectiva del álgebra lineal, esto significa que dos subespacios de dimensión 100.000 de un espacio de dimensión 300.000 elegidos de forma aleatoria, serán casi siempre disjuntos. Así que en principio es posible recuperar la imagen o, al menos, sus 100.000 componentes más importantes, a partir de estas 300.000 medidas aleatorias.

En esencia, entender una imagen de 2 millones de píxeles en una base de ondículas nos garantiza que, eligiendo sólo 300.000 de estas de forma completamente aleatoria, 100.000 de ellas nos permitirán recuperar la imagen con mucha precisión.

Para rescatar la imagen evitando ruidos habrá que usar algunas técnicas de recuperación de algoritmos no triviales. Pero eso ya es harina de otro costal y, quizás... para otro artículo.

Por último, puede ser interesante repasar algunas de las aplicaciones de esta idea tan abstracta del *compressed sensing*:

1. Imagen por resonancia magnética. En medicina, una resonancia intenta recuperar una imagen detallada de partes del cuerpo humano a partir de un número grande, pero finito, de medidas. Por el número de medidas necesitadas el proceso es lento para el paciente, pero las técnicas de *compressed sensing* pueden reducir el número de medidas necesitadas significativamente, llevándonos a procesos más rápidos.

2. Astronomía.
Muchos fenómenos astronómicos (por ejemplo los púlsares, estrellas de neutrones con un intenso campo magnético que giran sobre sí mismas) tienen varias frecuencias de oscilación que puede provocar que se dispersen o compriman mucho en distintos dominios de frecuencia. En este caso las técnicas de *compressed sensing* permiten medir estos fenómenos en el dominio temporal (a partir de datos del telescopio) consiguiendo reconstruir la señal original con precisión incluso a partir de datos incompletos o ruido.

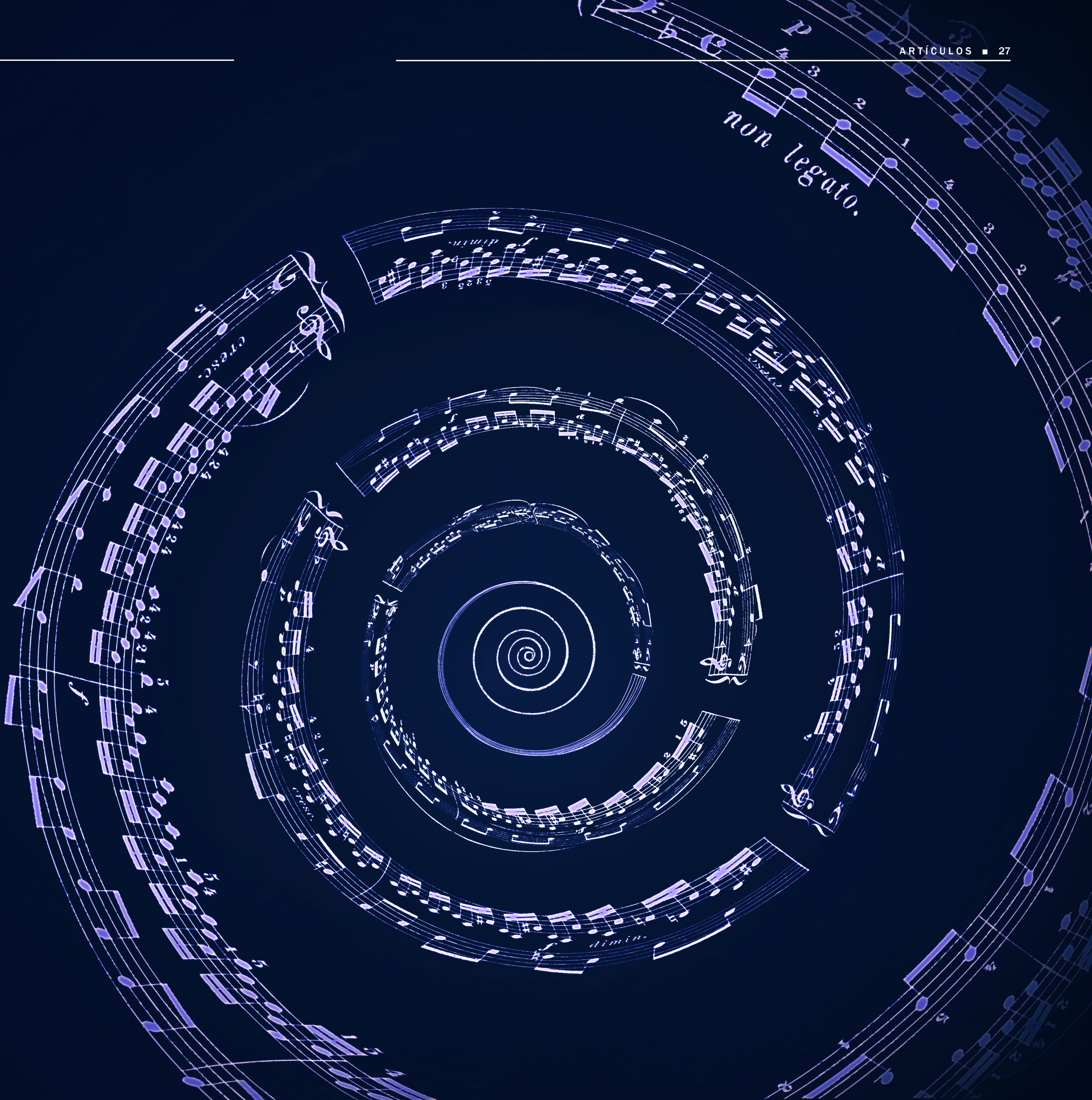
3. Códigos lineales.
En este caso el *compressed sensing* nos proporciona un método simple para combinar el output de varios transmisores de tal forma que si una fracción importante del output se pierde o se daña, todavía podamos recuperar la transmisión original.

Bach elevado a Doce

La solución de Bach para paliar la quinta del lobo consistió en igualar las frecuencias de todas las notas a una diferencia interválica constante. Si se representan de manera gráfica conforman una espiral logarítmica.

Esta imagen está constituida a partir de fragmentos del Preludio VI del Clave bien temperado de J.S Bach, trazando dicha espiral.

Por Lucía García-Gil Simancas
Portada de Irene Ramiro López



"La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando"[1] fueron las palabras de Gottfried Leibniz, gran matemático y filósofo, que unieron dos disciplinas opuestas. Ciencia y arte. Lógica y sentimiento. Matemáticas y música. Dos lenguajes universales.

La música constituye un conjunto abierto e infinito de sensaciones, una fusión impecable de ritmos que se acompasan con los latidos de corazón y melodías capaces de traspasar nuestra piel y danzar con nuestros pensamientos. Pero al otro lado de la radio o bajo un foco en el escenario, un intérprete lee una partitura conformada por intervalos matemáticos, subdivisiones rítmicas y patrones musicales. El intérprete es capaz de transformar un continuo de cálculos mentales en una melodía imperecedera en el pensamiento del oyente.

La música, al igual que cualquier lenguaje, sigue unas reglas determinadas, unos axiomas que permiten la construcción de melodías. Los fundamentos matemáticos de la música han constituido uno de los objetos de estudio más esenciales para filósofos, científicos y matemáticos, desde la construcción de la escala tonal de Occidente, el círculo de quintas, la coma pitagórica y *El clave bien temperado* de Bach.

1. Construcción de la escala pitagórica.

Una escala musical se puede definir como una agrupación ordenada de sonidos o notas concretas que permiten componer un entorno sonoro. Las escalas varían en función de las distintas regiones del mundo, y han estado sujetas a las vicisitudes del tiempo, los cambios culturales y la experimentación de los compositores y teóricos. La escala diatónica destaca en Europa occidental, construida a partir de los criterios de la afinación pitagórica[2].

Dejaremos a un lado la interpretación física del sonido, las vibraciones y los armónicos, para analizar los argumentos matemáticos que ofreció la Escuela Pitagórica y así encontrar aquellas notas consonantes, es decir, aquellos sonidos que al ser tocados simultáneamente producen un efecto agradable o armonioso.

1.1. Relaciones de proporción de la escala e intervalos musicales.

Comencemos con el caso más sencillo. Tenemos una cuerda de longitud determinada L, atada en ambos extremos, con una tensión y grosor concretos, y la hacemos vibrar. Al oscilar, producirá un sonido determinado. Con una cuerda idéntica a la anterior, pero con la mitad de longitud, escucharemos un nuevo sonido, más agudo. Sin embargo, al tocar ambas cuerdas a la vez se produce una fusión elegante, equilibrada. Por simplicidad, denominamos con el mismo nombre a ambos sonidos (do) y otorgamos frecuencias de 1 a la primera cuerda y de 2 a la segunda.

Buscamos, a continuación, sonidos intermedios entre las frecuencias mencionadas, siguiendo como patrón la fórmula de la media aritmética (1), donde $a = 1$ y $c = 2$ y b sería la nueva frecuencia buscada.

$$b = \frac{a+c}{2} \qquad (1)$$

De este modo obtenemos que la frecuencia de la siguiente nota es $b = 3/2$. El intervalo entre do y esta nueva nota se conoce como quinta justa, mientras que la relación de frecuencias entre 1 y 2 se denomina octava. La quinta justa de do es sol.

Seguimos construyendo la escala. Para el siguiente intervalo musical se emplea la media armónica,

$$d = \frac{2ac}{a+c} \qquad (2)$$

donde volvemos a emplear las frecuencias conocidas de $a = 1$ y $c = 2$. Se obtiene así la proporción para calcular el intervalo de cuarta justa $d = 43$, correspondiente a la nota denominada fa.

Por último, considerando b como la media geométrica entre a y c, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \qquad (3)$$

De esta forma cerramos el círculo de intervalos, obteniendo la siguiente octava. Si $a = 1$ es la frecuencia de nuestro primer do y $b = 2$ es la frecuencia de la octava, el tercer do tiene una frecuencia de $c = \frac{2^2}{1}$. De manera equivalente, una octava más arriba supone multiplicar por 2 la frecuencia de la anterior. La frecuencia de la n-ésima octava de do, c_n, viene dada por

$$c_n = (2)^{n-1}, n = 1,2,3,\ldots \qquad (4)$$

En la Tabla 1 se recogen las proporciones halladas para los distintos intervalos, así como las frecuencias reales de sus correspondientes notas.

1.2. Intervalos de tono.

Los intervalos de cuarta, quinta y octava conforman las cuatro relaciones más importantes de la escala pitagórica o diatónica, el esqueleto principal sobre el que se asienta una composición musical. Sin embargo, si intentamos construir una melodía mediante una combinación de dichas notas, el resultado sería una composición insulsa, anodina, que no podría ni a aspirar a ser la banda sonora de los largos trayectos en los ascensores públicos.

Nos encontramos en una situación de grave necesidad de nuevos sonidos que acompañen a nuestras cuartas, quintas y octavas y que nos permitan crear desde una

canción de 3 minutos de Ed Sheeran hasta una sinfonía de Beethoven. Bajo esta premisa, entran en juego los tonos, cuya proporción se puede obtener gracias al cociente de la media aritmética y la media armónica (5).

$$t = \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\left(\frac{2ac}{a+c}\right)} \qquad (5)$$

Si introducimos como valores de a y c los obtenidos para el primer y el segundo do, obtenemos la relación de $t = 9/8$ para el intervalo tonal o de segunda mayor. Partiendo de la nota do de frecuencia 1 y multiplicando por el factor t, obtenemos las sucesivas notas de la escala: re y mi. La cuarta y quinta nota son fa y sol respectivamente, halladas mediante las proporciones discutidas en la sección anterior. A partir de sol, repetimos la operación de multiplicar por t hasta alcanzar la octava, obteniendo así la escala diatónica de ocho notas.

Dichas operaciones han sido recogidas en la Tabla 2.

1.3. El círculo de quintas y la coma pitagórica.

Existen diversas maneras de construir la escala diatónica, por ejemplo, se puede partir de las proporciones interválicas desarrolladas en las dos secciones previas o mediante una sucesión de quintas justas de razón 3/2. Este último método se conoce como afinación pitagórica.

En este procedimiento, se parte de una nota base de la escala diatónica y se van encadenando intervalos de quinta justa de manera ascendente y descendente. Pongamos que iniciamos nuestro ciclo de quintas con la famosa nota do y calculamos las quintas ascendentes sucesivas mediante la multiplicación del factor 3/2. La siguiente nota se corresponde con la frecuencia de $3/2 \cdot 3/2 = 9/4$ y, a continuación, dividimos por dos para que esté dentro de nuestra primera octava (el valor de su proporción debe ser menor que la frecuencia del segundo do). De este modo, tenemos las siguientes frecuencias: 1, 9/8 , 3/2.

Continuamos este método, multiplicando por 3/2 y dividiendo por 2 cuando sea necesario hasta llegar a la nota de partida y cerrar el círculo de quintas. Es decir, vamos agregando notas que siguen la relación $\frac{3^m}{2^n}$, donde m y n son números enteros positivos. Sin embargo, al alcanzar la decimosegunda quinta nos encontramos de frente con un problema:

$$\frac{3^{12}}{2^{18}} = 2.02728\ldots$$

Nota	Proporción	Frecuencia (Hz)	Intervalo respecto a la fundamental
Do central	1	261.63	Nota fundamental
Fa	4/3	348.84 = 261.63 · 4/3	Cuarta justa
Sol	3/2	392.44 = 261.63 · 3/2	Quinta justa
Do	2	523.25 = 261.63 · 2	Octava

Tabla 1. Proporciones y frecuencias para los intervalos principales de la escala de do central (3).

Do	1	Nota fundamental
Re	9/8	Segunda mayor
Mi	81/64	Tercera mayor
Fa	4/3	Cuarta justa
Sol	3/2	Quinta justa
La	27/16	Sexta mayor
Si	243/128	Séptima mayor
Do	2/1	Octava

Tabla 2. Escala diatónica de 8 notas con las respectivas proporciones de frecuencias.

Y dividiendo por dos para que esté dentro de los límites definidos de la escala obtenemos:

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364\ldots$$

Hemos recuperado una frecuencia muy similar a la de la nota do que habíamos empleado de base pero difiere en una cantidad de 0.01364, denominada coma pitagórica. Dicho valor residual deriva en disonancias entre las dos octavas. Es decir, la coma pitagórica surge como consecuencia de que en el círculo de quintas, doce quintas no son equivalentes a siete octavas.

El procedimiento habitual para paliar dicho problema dimana de la aparición de la denominada quinta del lobo, conformada por la diferencia de doce quintas puras de relación 3:2 menos siete octavas. Consiste en un intervalo especialmente disonante que implica alteraciones en la coherencia sonora y en la estabilidad tonal de las composiciones. El modo sencillo de disimular esta disonancia es minimizar su uso, por tanto, la quinta del lobo se traslada a dos notas de uso poco frecuente en la música occidental, véase la Figura 1.

Llegados a este punto, es necesario introducir un nuevo concepto. Nos hemos familiarizado con la escala diatónica, construida a partir de intervalos tonales o de segunda mayor y de las cuartas y quintas de do. Sin embargo, el procedimiento de Pitágoras del encadenamiento de quintas da lugar a una escala de doce sonidos intermedios en la octava, denominada *escala cromática* o *dodecafónica*, Figura 2.

Los intervalos entre dos sonidos consecutivos se denominan *semitonos*. Cuando ascendemos en la escala, el convenio implica utilizar el símbolo del *sostenido*, #, para indicar que la nota es un semitono mayor que la de partida. Sin embargo, al descender, se emplea el símbolo del *bemol*, ♭.

En la escala cromática, la quinta del lobo se manifiesta en el intervalo entre sol sostenido y mi bemol, generando una incongruencia entre las notas sol sostenido y la bemol, pues se hacen coincidir como si se tratase de la misma nota, aunque tengan frecuencias diferentes debido al valor residual de la coma pitagórica.

Una manera gráfica de observar los intervalos consiste en realizar una representación mediante una espiral logarítmica (Figura 3), donde la frecuencia de cada sonido se corresponde con $r = 2^{\frac{\theta}{2\pi}}$, con r la proporción de la frecuencia de un intervalo específico. De esta forma, retomamos la nota de do (a distintas frecuencias, más graves o agudas) cada vez que el ángulo se hace cero o $2\pi k$. Además, se puede observar que dos ángulos iguales se corresponden con un mismo intervalo. Si queremos hallar el ángulo al que se encuentra una quinta, operamos de la siguiente forma:

$$\theta = 2\pi \log_2\left(\frac{3}{2}\right) \backsimeq 1.17\ rad.$$

De esta forma, hemos construido la escala completa con la que se realizan la mayor parte de las composiciones de música occidental, partiendo, únicamente, de argumentos puramente matemáticos.

2. El clave bien temperado.

La afinación pitagórica generaba un problema al tratar con la quinta del lobo. En instrumentos de cuerda, la coma pitagórica puede ser paliada siguiendo el método expuesto en la sección previa. En un instrumento de cuerda, pongamos como ejemplo el violín o un chelo, las frecuencias que se pueden producir son ilimitadas pues dependen de la colocación del dedo sobre la cuerda. De este modo, se pueden conservar las relaciones interválicas de la escala diatónica sin importar la quinta del lobo. En el momento en que se necesite tocarla, la afinación se puede ajustar en el momento, desplazando el dedo levemente hacia arriba o hacia debajo de la cuerda.

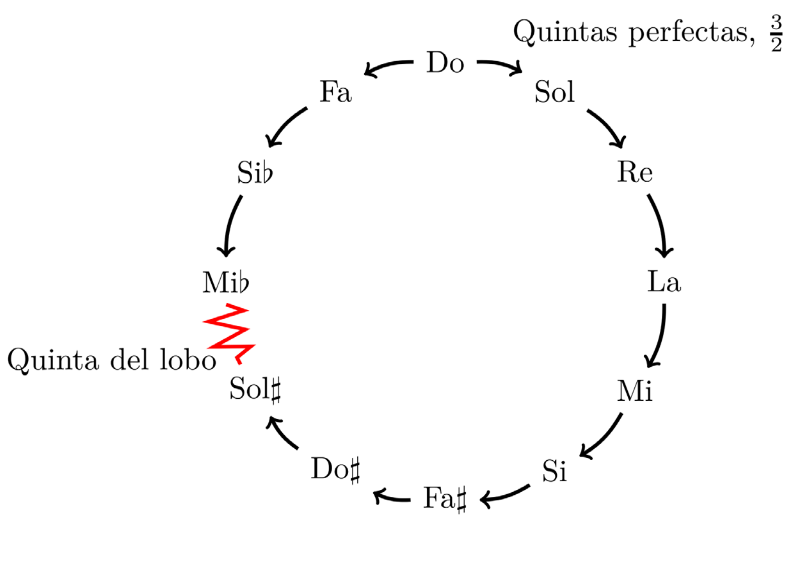


Figura 1. Esquema del círculo de quintas y de la quinta del lobo[5].

Sin embargo, en los instrumentos de afinación fija como el piano, la distancia entre dos notas es inalterable (las teclas producen sonidos concretos que no se pueden modificar), dificultando el cambio de tonalidad al arrastrar el valor residual de la quinta del lobo.

Ante este problema, en la época de Bach (1685-1750), se desarrolló el temperamento bueno o temperamento igual. Consistía en un método de afinación del instrumento tal que la distancia entre los sonidos de todas las teclas contiguas fuera la misma. De esta forma, era posible modular a cualquier tonalidad sin requerir un reajuste de afinación previo.

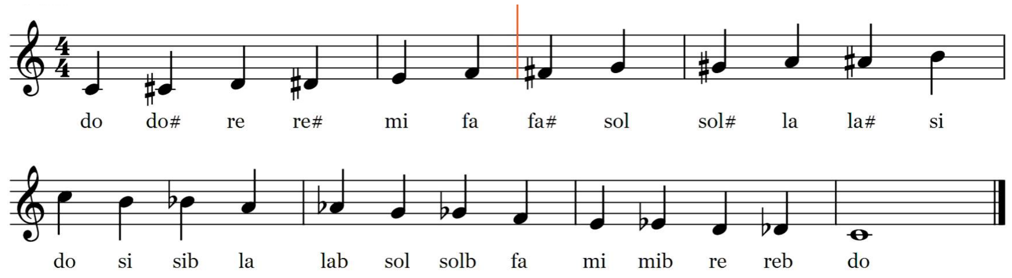


Figura 2. Escala cromática o dodecafónica[6].

Analizando este problema desde un punto de vista matemático, lo que queremos es conseguir que la distancia entre las doce notas de la escala cromática sea la misma. Si partimos de la primera nota con una frecuencia 1 y queremos que la distancia sea un valor x constante, entonces la frecuencia de la segunda nota debe ser x, la de la tercera debe ser x^2 y así sucesivamente hasta completar la escala. El do de frecuencia 2, se correspondería con $x^{12} = 2$.

De este modo, obtenemos los siguientes factores por los que hay que multiplicar a la frecuencia de la primera nota para construir la escala temperada

$$1, \sqrt[12]{2}, (\sqrt[12]{2})^2, (\sqrt[12]{2})^3, (\sqrt[12]{2})^m$$

donde m es un número natural $m = 0, 1, 2, 3\ldots 12$. Obtenemos, así, la función

$$f_m = f_0(\sqrt[12]{2})^m.$$

A partir de esta nueva técnica de afinación o temperamento, nació *El clave bien temperado (Das wohltemperierte Klavier*, en alemán), una de las obras maestras de Johann Sebastian Bach. Consta de dos ciclos de preludios y fugas compuestos en todas las tonalidades mayores y menores de la escala cromática o dodecafónica. De esta forma, se podían interpretar los preludios y fugas de manera continuada, sin peligro de la aparición de disonancias debido a la coma pitagórica y a la quinta del lobo al modular a otra tonalidad.

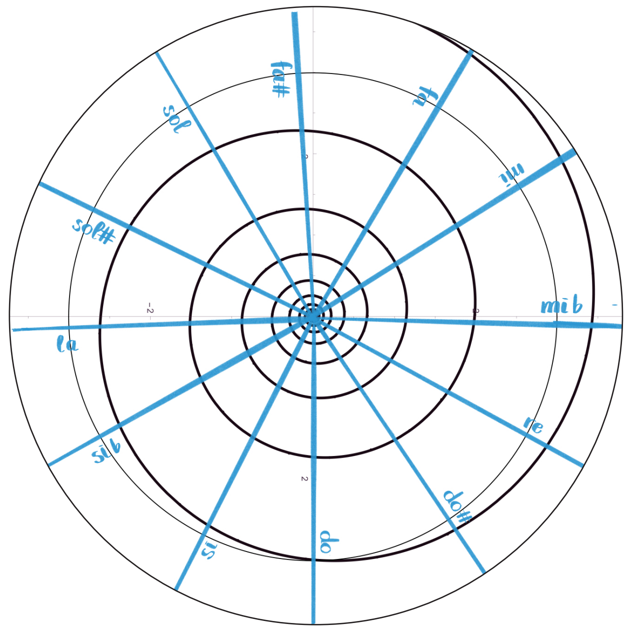


Figura 3. Representación de una espiral logarítmica, donde $r = 2^{\frac{\theta}{2\pi}}$ y r es la frecuencia de la nota.

3. Conclusión.

En el siglo VI a.c, la Escuela Pitagórica construyó, mediante puros argumentos matemáticos, una estructura musical que conformaba un entorno sonoro específico, un conjunto de doce notas que ha acompañado a la humanidad hasta nuestros días. Doce frecuencias que se han entrelazado con la maraña que conforman nuestras vidas. Desde el tono de llamada de nuestro móvil, pasando por la música de caja del Mercadona, hasta nuestras canciones más íntimas.

Potencias, logaritmos y proporciones aritméticas. La banda sonora de nuestra vida fue compuesta mucho antes de nuestra llegada a este mundo, y seguirá sonando cuando no estemos para escucharla. Nuestra deuda insalvable con las matemáticas.

Referencias

1 J. MULERO, L. SEGURA, J. M. SEPULCRE, *El secreto de los números.* Editorial Universidad de Alicante (2017). ISBN 9788497174909. p. 11. https://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-pitagorica-el-origen-de-la-escala-cromatica.html

2 https://planetamusik.com/blog/escala-musical/ , consultado el 11 de Septiembre de 2021.

3 https://web.archive.org/web/20070305040009/http://wiki.highinbcgallery.com/index.php/Almost_a_shape/technology/Piano_frequencies/Piano_frequency_table.pl, consultado el 11 de Septiembre de 2021.

4 https://berminguez.wordpress.com/2013/04/21/la-quinta-del-lobo/

5 https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Sestina_system.svg. Autor: ZooFari

6 https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%ADrculo_de_quintas#/media/Archivo:Circle_of_fifths_deluxe_4-ES.png

Matemáticas y literatura

OPERANDO EN PROSA

Si nos remontamos en el tiempo, antes de la edición en LaTeX, los manuales escritos a máquina e incluso el lenguaje simbólico, las matemáticas estaban redactadas en lenguaje natural. Gran cantidad de papiros egipcios que han llegado a nuestros días incluyen métodos de cálculo formulados sin notación especial, salvo quizás para la incógnita, representada por la palabra *aha* (que significa 'montón'). En Mesopotamia, se resolvían problemas algebraicos de una manera completamente verbal, lo que hoy se conoce como Álgebra Retórica.

Aún más curioso resulta encontrar teatro y poesía en las matemáticas. El tratado chino *Chou Pei* recopila cálculos astronómicos y está escrito íntegro en forma de diálogo entre un príncipe y su ministro. A miles de kilómetros, en la India, un padre se dirige con ternura a su hija para desentrañarle los secretos de la aritmética a través de ejercicios en verso así de imaginativos:

La quinta parte de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de kadamba; [...]
Dime encantadora mujer el número exacto de abejas.

(Lilavati, 54)

En esta sección presentamos una selección de artículos que estudian las distintas relaciones que existen entre las matemáticas y la literatura. Desde la belleza poética del quinto postulado de Euclides, pasando por las paradojas de Lewis Carroll hasta conversar con la ilustre Marta Macho, responsable de la sección *Literatura y Matemáticas* en la web DivulgaMat, de la Real Sociedad Matemática Española.

Paradoja carroliana

Por Alba Dolores García Ruiz

En una carrera, el corredor más rápido nunca puede superar al más lento, ya que el perseguidor debe primero llegar al punto donde comenzó el perseguido, de modo que el más lento siempre debe tener una ventaja.

(según lo contado por Aristóteles, Física VI:9, 239b15)

De este modo se plantea la famosa paradoja de Aquiles y la Tortuga, una de las varias atribuidas al filósofo de la Antigua Grecia Zenón de Elea (c.490-430 a.C.). Este pensador clásico "inmensamente sutil y profundo", en palabras del matemático Bertrand Russell, fue discípulo directo del filósofo presocrático Parménides de Elea, en defensa de cuya doctrina elaboró sus aporías.

Como sucede con todos los autores clásicos, la principal dificultad para conocer el legado de Parménides es el tiempo transcurrido. De su única obra, un poema filosófico en verso épico, conservamos tan solo algunos fragmentos provenientes de citas de otros autores. Y aún deberíamos sentirnos agradecidos, pues la integridad de lo que conservamos es notablemente mayor que lo que nos ha llegado de las obras de otros filósofos presocráticos, pudiendo así reconstruir su doctrina con mayor precisión. En el ámbito de la metafísica o, como él la denomina, "la vía de la verdad", se ocupó de *lo que es* o *ente*, una especie de *todo*. El poema de Parménides comienza con un proemio en el que se describe el viaje que hace "el hombre que sabe" por un camino alejado del camino usual de los mortales y que desemboca en una entrevista con una diosa. El discurso de esta deidad anónima conforma el resto del poema y recoge las reflexiones del autor. En la revelación divina encontramos una lista de atributos del *ente* entre los que destaca para nosotros su propiedad de ser inmóvil. Como cabría esperar, ante esa declaración de que el movimiento no es más que una ilusión, la reacción no se hizo esperar. Algunos relatos sugieren que otros filósofos habrían pergeñado paradojas contra esta visión y que Zenón se servía de las suyas propias para defender la doctrina de su maestro.

En las nueve paradojas que conservamos, Zenón utiliza el método dialéctico de Sócrates y se basa en argumentos que podrían considerarse como los primeros ejemplos de prueba por contradicción (o *reductio ad adsurdum* para los más puristas). Esto es, al comienzo se enuncia como supuesto la misma posición que se quiere refutar y se construye, como su propio nombre indica, una contradicción que la imposibilita. Las hipótesis que sustentan dicha posición, en la vida cotidiana, se experimentan como innegables. Es posible que el lector haya oído hablar de tres de estos problemas filosóficos por ser los más famosos y difíciles de rebatir: el argumento de la dicotomía, la paradoja de la flecha en vuelo y la que nos ocupa, la de Aquiles y la Tortuga. Estos sofismas se denominan las "paradojas del movimiento" y son esencialmente equivalentes entre ellas, por lo que el comentario que aquí realizaremos de la última debería servir de acercamiento a las dos restantes. Hijo de un mortal y una ninfa, Aquiles fue sumergido por su madre en la laguna Estigia con el fin de hacerlo inmortal, pero olvidó mojar el talón por el que lo sujetaba, dejando vulnerable esa parte de su cuerpo, siendo este el origen de la expresión "talón de Aquiles". Este héroe de la guerra de Troya era considerado el más veloz de los hombres. En la célebre obra homérica, la *Ilíada*, suele ser calificado como "el de los pies ligeros" y esta fama es la que le otorga un papel protagonista en la obra de Zenón. Para entender la paradoja debemos situarnos en una carrera imaginaria. Uno de los contrincantes será Aquiles, el más hábil de los guerreros aqueos y vencedor de mil batallas, un superhombre casi invencible y, como ya se ha dicho, el más rápido de los mortales. El otro contrincante será una tortuga, un animal de proverbial lentitud y parsimonia. Para acallar las quejas por lo desigual de este enfrentamiento, antes de empezar Aquiles decide darle un estadio de ventaja a la tortuga, es decir, la licencia de comenzar algunos metros por delante (a efectos prácticos no será relevante de qué distancia se trate exactamente por lo que diremos unos cien metros de ventaja).

En ese momento se da comienzo a la carrera. Suponiendo que ambos comiencen a correr a velocidad constante (obviamente, uno de ellos mucho más rápido que el otro), cabe esperar que Aquiles recorra rápidamente los cien metros de ventaja hasta llegar al punto de partida de la tortuga. Durante ese tiempo la tortuga, poseedora de un insospechado espíritu competitivo, se habrá desplazado unos cuanto metros hacia delante. Por supuesto, será una distancia más corta, pongamos cincuenta metros. Así que Aquiles, confiado en su enorme poderío físico, decide cruzar ese puñado de pasos, utilizando un poco más de tiempo y llegando de nuevo a donde estaba la tortuga. Como es claro, en ese intervalo de tiempo, ella habrá avanzado un poco más y Aquiles necesitará también algo más para llegar a ese tercer punto. Por lo tanto, cada vez que Aquiles llega a algún lugar donde ha estado la tortuga, esta ya no se encuentra allí y todavía ha de recorrer un poco para alcanzarla.

Y argumenta Zenón, con mucha razón, que **así podríamos seguir hasta el infinito**, por más que contradiga cualquier experiencia cotidiana:es claro que un corredor veloz alcanzará a uno lento aunque le dé ventaja siempre que la carrera dure lo suficiente.

¿O será esto tan solo una ilusión?

Una larga lista de pensadores ha tratado de refutar los contundentes argumentos de Zenón, desde filósofos clásicos del calibre de Aristóteles o Tomás de Aquino hasta autores más actuales de igual renombre como Bertrand Russell o Nick Huggett.

¿Podéis creer que incluso Jorge Luis Borges escribió un ensayo al respecto? *La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga*, en la que tilda a Zenón de incontestable.

En esta ocasión, yo destacaría la *solución* propuesta por Diógenes el cínico: se dice que al escuchar la paradoja no dijo nada, pero se levantó y caminó para demostrar a Zenón la existencia del movimiento. ¿Acaso no se utiliza la expresión "el movimiento se demuestra andando" para referirnos a un problema que se resuelve con un experimento práctico?

Sin embargo, para aclarar por completo cualquier paradoja se necesita mostrar qué es lo que está mal en el argumento, no solo la falsedad de las conclusiones. Así, la singular argumentación de Diógenes no habría servido para dilucidar el vencedor de tan desigual competición. Y ante un problema sin resolver es sabido que las matemáticas son una herramienta muy socorrida.

Para un físico, lo que prevalece son los datos que nos pueda suministrar la sensibilidad (en este caso, mediciones hechas con una cinta métrica y un cronómetro que permitan determinar, sobre el terreno, la posición y momento exactos en que coinciden los dos corredores). De este modo cuando, *a posteriori* y haciendo uso de herramientas matemáticas, se generalizan estos resultados por medio de la teoría de la mecánica, la paradoja de Zenón queda fuera de escena, ya que los aparatos de medición, y por ende, la física, se ciñen en todo momento a cantidades finitas. Sin embargo, es cierto que toda cantidad finita puede ser dividida *in mente* en infinitas partes y, si concedemos preeminencia a la razón, la aporía permanece inmutable.

¿Sabías que...?

Además de las célebres aventuras de Alicia, **L. Carroll** nos dejó multitud de poemas, textos satíricos, ilustraciones y ensayos. No sólo eso sino que tuvo su propio estudio de fotografía, donde realizó más de 3000 imágenes, incluyendo retratos de personajes notables. Más sorprendente aún: trabajó 26 años como profesor de matemáticas y público numerosos artículos en geometría, álgebra, lógica, matemática recreativa y el estudio de paradojas. ¡Todo esto mientras desempeñaba su oficio de diácono!

Retrato de Lewis Carroll por Natata en Shutterstock.

Un genuino matemático podría recurrir a las series geométricas (a saber, aquellas en las que los sumandos cumplen una relación del tipo $x_{n+1} = r \cdot x_n$ donde r es un factor real que, si es mayor o igual a uno, consigue exasperar a más de un matemático), pero de nada nos serviría. Si enumeramos $1, 2, \ldots, n$ los momentos sucesivos en que Aquiles llega al punto donde estaba previamente la tortuga, podemos tomar A_n, T_n y d_n como las posiciones de Aquiles y la tortuga, respectivamente, así como la distancia entre estos, en el instante n. Consideremos entonces las sucesiones numéricas $\{d_n\}, \{a_n\} = \{A_n - A_{n-1}\}$ y $\{t_n\} = \{T_n - T_{n-1}\}$, dadas las dos últimas por las distancias recorridas por cada corredor entre los momentos $n-1$ y n. Tal y como hemos planteado el problema, sabemos que se satisfacen las siguientes relaciones para sus términos:

$$a_n = d_{n-1}, \ d_n = t_n \ \text{y} \ t_n = \frac{a_n}{2}$$

De donde un sencillo cálculo permite concluir que $d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d_0}{2^n}$, i.e., es una serie geométrica de razón $r = 1/2$. De igual modo podemos notar que $a_n = \frac{a_1}{2^{n-1}}$ y $t_n = \frac{t_1}{2^{n-1}}$. Es conocido que la suma de todos los términos de una serie geométrica de r razón menor que uno es $S = \frac{e_1}{1-r}$; que en nuestro caso permite calcular la distancia recorrida por los contrincantes, a saber,

$$S_A = \frac{d_0}{1-1/2} = 2 \cdot d_0,$$
$$S_t = \frac{d_1}{1-1/2} = d_0.$$

Así, el final de la carrera coincide con el lugar $2 \cdot d_0$ en que Aquiles alcanza, de hecho, a la tortuga. Llegados a este punto, un analista ingenuo comenzaría a celebrar su victoria sobre el eleata. No obstante, un estudio más cuidadoso de las series geométricas arroja un sorprendente resultado. Prestando atención a la sucesión d_n, vemos que sus términos cumplen que $d_0 > 0$, $d_1 = d_0/2 > 0$, $d_2 = d_0/4 > 0, \ldots, d_n = d_0/2^n > 0$ y tan solo al tomar el límite llegamos a un valor nulo, $\lim_{n\to\infty} d_n = d_0 \lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$. Es decir, la separación entre los corredores solo desaparecerá tras una cantidad infinita de pasos. Se mantiene, de este modo, la paradoja. Por último, podríamos sacar la artillería pesada y pedir a George Cantor que, con su teoría de la medida para transfinitos, acabara con el embrollo; mas ni siquiera sus revolucionarios números cardinales $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ servirían para tal fin. Podría parecer que $2^{\aleph_0}$, el cardinal de los números reales, permitiera dilucidar el problema, ya que representa la propiedad de *continuidad* existente en el espacio y el tiempo. Se puede, en efecto, establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta (en nuestro caso, la pista de la carrera) y afirmar que tenemos $2^{\aleph_0}$ puntos en la recta. Del mismo modo, todo segmento tendría esta cantidad de puntos. Los defensores de Cantor argumentarían que los corredores recorren la totalidad de los puntos de la recta y que la distancia entre ellos, d_0, es despreciable, aunque contenga también un número infinito de puntos, ya que $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Sin embargo, no se puede decir que el final de la carrera se sitúe en el punto $2^{\aleph_0}$ de la recta, porque el número cardinal de un conjunto infinito no es lo mismo que su número ordinal (es claro que en finitos así es, el décimo elemento es el último de un conjunto de diez objetos). Por ello, conocer la cantidad exacta de puntos entre Aquiles y la tortuga no parece que proporcione una respuesta completa al problema: solo conseguimos *esconder el problema debajo de la alfombra*. A todo aquel interesado en unirse a las filas (en su mayoría matemáticos, filósofos, incluso algunos físicos) de los que luchan esta batalla, no puedo sino recomendarle leer el trabajo de José Enrique García Pascua titulado *Aquiles, la Tortuga y el infinito*, el artículo *A Discrete Solution for the Paradox of Achilles and the Tortoise* de Vincent Ardourel (si estáis buscando algo más peliagudo) y cualquier cosa que encuentre en Internet sobre el tema. Le aseguro que no se verá decepcionado.

Una de las primeras ilustraciones del propio Carroll retratando a sus personajes más icónicos. **¿Creéis que nuestra sabia tortuga habrá competido en alguna ocasión contra el conejo blanco de Alicia?**

Sea como fuere, el lector tiene que admitir que existe la posibilidad de que Aquiles sea, en efecto, el vencedor de la carrera. El famoso escritor (y matemático y lógico y fotógrafo y diácono y...) Lewis Carroll se imaginó este hipotético caso como verdadero y escribió una ficticia conversación entre Aquiles y la tortuga una vez finalizada la carrera.

En ella Aquiles, tras la victoria, se encuentra cómodamente sentado sobre el caparazón de la tortuga y esta, que aparentemente no está muy satisfecha con el resultado, decide regalarle algún dolor de cabeza al héroe jugando con las bases de la lógica. Así, la tortuga le da la vuelta la tortilla y habla a Aquiles sobre distancias que se hacen cada vez más grandes, y no menores como ocurría antes. Aludiendo a los Elementos de Euclides, la tortuga considera la argumentación lógica siguiente:

A: Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí. (La primera noción común de Los Elementos de Euclides)

B: Dos lados de este triángulo son dos cosas que son iguales a una misma cosa.

C: Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí.

Entonces, la tortuga le pregunta a Aquiles si C se puede deducir lógicamente de las premisas A y B, y Aquiles concede que obviamente lo hace.

Ella le pregunta si puede haber un lector que admita que el argumento es lógicamente válido como una secuencia, pero que niega que las premisas A y B sean ciertas. Por supuesto, Aquiles acepta que este lector pueda existir. A continuación, y por analogía, la tortuga se pregunta si puede existir un segundo tipo de lector, uno que acepte que las premisas A y B son ciertas, al tiempo que no acepta el principio de que "si A y B son ciertas, entonces C debe ser cierta". Aquiles otorga a la tortuga que este segundo tipo de lector también puede existir. Llegados a este punto, la tortuga pide que se la trate como un lector del segundo tipo, y reta a Aquiles a obligarla a aceptar la premisa C. Para tal fin, Aquiles tiene que añadir una nueva hipótesis:

D: Si A y B son ciertas, entonces C debe ser cierta.

Ahora la tortuga acepta la premisa D, pero sigue negándose a aceptar el argumento extendido. Cuando Aquiles, que empieza a mosquearse, le exige que al aceptar A y B y D debe aceptar C, la tortuga señala que esta es otra proposición hipotética, y sugiere que incluso aceptando D aún puede negar la conclusión C. ¿La solución? Añadir previamente la veracidad de la siguiente hipótesis:

E: Si A y B y D son ciertas, entonces C debe ser cierta.

¿Se ve ya por dónde van los tiros? La tortuga accede a aceptar cada premisa hipotética de este tipo, pero niega que la conclusión se siga de las premisas, ya que cada vez niega la hipótesis de que si todas las premisas escritas hasta ahora son ciertas, C debe ser verdad. Por lo tanto, la lista de premisas continua creciendo sin fin, dejando el argumento de siempre en la forma:

(1): "Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí."
(2): "Dos lados de este triángulo son iguales al tercer lado."
(3): (1) y $(2) \Rightarrow (\omega)$
(4): $(1), (2)$ y $(3) \Rightarrow (\omega)$
$\vdots$
(*N*): $(1), (2), (3), \ldots$ y $(N-1) \Rightarrow (\omega)$
$\vdots$
(ω): "Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí."

El relato de Carroll termina con Aquiles sumido en la desesperación tras meses atrapado en esta nueva carrera, pero el problema lógico no tiene un desenlace tan claro. La paradoja surge porque, a fin de explicar el principio lógico, se propondrá un principio anterior. Y, una vez que se cuenta con este principio, entonces se debe introducir otro más para explicar este. Por lo tanto, a medida que la cadena causal continúa, se va a parar a una secuencia infinita de proposiciones que surge de la deducción *modus ponens*, la más famosa de las reglas de inferencia en lógica proposicional.

Dime, estimado lector, ¿te apetece profundizar más en este quebradero de cabeza? En ese caso ojea el artículo *La paradoja de Lewis Carroll en Douglas R. Hofstader* de Luis Camacho.

No todo está perdido. Para Carroll se trata aquí de distinguir entre leyes lógicas y reglas de inferencia que se desprenden de ellas. En otras palabras, esto se evita si se introduce de antemano un sistema formal, donde el *modus ponens* es simplemente un axioma, y luego se verifica con el argumento más antiguo e irrefutable de todos: *porque es así*. Si se está participando en un sistema formal lógico, entonces solo hay que seguir las reglas sin cuestionarlas, como si de un juego se tratara. Por lo tanto, la introducción del sistema formal de la lógica resuelve la regresión infinita al detenerla ante los axiomas.

Podríamos concluir que no todo tiene una demostración matemática y que quizás Diógenes no estuviera tan equivocado al resolver de un plumazo la paradoja de Zenón. ¿No es, al final, en muchas ocasiones, la solución más simple la más acertada?

Entrevista a

MARTA MACHO

Por Alba Lirón León

Ilustración de Samuel Nevado Rodrigo

Marta Macho Stadler es Profesora Agregada de Geometría y Topología en la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU).

Lleva a cabo numerosas actividades desde hace años con una intensa y meritoria contribución en pro de la divulgación de las matemáticas. Uno de los objetivos de estas actividades es hacer visible el papel de las mujeres en las matemáticas, la ciencia y la tecnología. Es editora del blog de la Cátedra de Cultura Científica de la UPV/EHU *Mujeres con ciencia* desde su creación, en mayo de 2014. Además es responsable de la sección *Literatura y Matemáticas* en la web DivulgaMat, de la Real Sociedad Matemática Española, donde estudia el contenido científico y la estructura matemática en textos de novelas, tebeos, poesías y piezas teatrales.

Marta Macho Stadler, eres matemática, divulgadora, investigadora y Profesora en Geometría y Topología en la Universidad del País Vasco, doctora por la Université Claude Bernard de Lyon (Francia) y especialista en Teoría Geométrica de Foliaciones y Geometría no conmutativa. Cuéntanos un poco en qué consiste esta rama de las matemáticas y por qué decidiste dedicarte a ella.

Decidí dedicarme a la topología, la asignatura que más me gustaba en la carrera, por una profesora que tuve aquí en la Universidad del País Vasco, con la que empecé a trabajar en cuarto. Entonces había unas becas colaboración, que existen todavía, con las que podías empezar a trabajar en los dos últimos años de la carrera (cuarto y quinto). Me la concedieron y estuve colaborando con esta profesora, que se dedicaba a la topología difusa (topología *fuzzy*). Cuando acabé la carrera, entré inmediatamente a la universidad porque salió una plaza a tiempo parcial. Pero, en un momento dado, mi profesora me comentó que había un profesor en la Universidad de Lyon, Gilbert Hector, que estaba buscando estudiantes en España porque en Francia no se animaba mucha gente a hacer la tesis en matemática pura. Además, yo sabía bien francés. Para no dejar mi puesto de trabajo, pedí al departamento que me permitiera dar toda la docencia en un cuatrimestre y me marché a Francia. Allí, empecé haciendo unos cursos de máster y, un año después, entré en el equipo de Gilbert Hector, que me ofreció trabajar en un problema de teoría de foliaciones. Así fue como llegué a esta rama de la topología.

Aunque se llama teoría geométrica de foliaciones, en realidad, todo lo que hice en Lyon es muy topológico. Una foliación es, esencialmente, una partición de un espacio abstracto o de una variedad topológica, que obedece a veces una solución de una ecuación diferencial o similares. Gilbert Hector me propuso hacer un estudio de foliaciones incluido en espacios dinámicos. En realidad, lo que miramos no son las hojas en sí sino cómo se enrollan unas alrededor de las otras. La herramienta que usamos para estudiar las foliaciones y sus propiedades topológicas se llama geometría no conmutativa.

¿En qué consiste la carrera de investigadora? ¿Cómo es la vida de una persona que investiga?

Depende un poco de si sólo investigas o si eres docente investigador. Mi trayectoria es distinta a la que tiene una persona actualmente. En aquel momento entrábamos en la universidad porque había necesidad de docentes y, simultáneamente, comenzábamos a hacer la tesis. Como consecuencia de compatibilizar la docencia con la investigación, tardábamos un poquito más que ahora en completar la tesis. En cambio, hoy en día, casi todo el mundo que accede al mundo de la investigación por primera vez (quienes empiezan a hacer una tesis doctoral) lo hace a través de una beca.

¿En qué consiste entonces la carrera de investigadora? Fundamentalmente en seguir estudiando. Hay que estudiar mucho y trabajar duro, porque se te propone un problema que no ha resuelto nadie y que tú tienes que resolver. En mi caso, o cuando llevas a cabo una tesis en matemática pura, es fundamental ir a seminarios y seguir formándote de forma continua e indefinida. Normalmente, cuando estás en un grupo de un centro de investigación o de la universidad donde alguien dirige una tesis, hay seminarios, hay cursos, etc. Hay un montón de cosas que te ayudan a completar tu formación y a moverte por esas zonas donde no eres especialista. En resumen, la carrera de una investigadora en matemáticas consiste fundamentalmente en estudiar e intercambiar conocimiento para avanzar en tu tema de trabajo.

¿Crees que la labor de investigación en las universidades se desarrolla en un ambiente muy competitivo?

Depende de la suerte que tengas. En mi caso, cuando estaba en Francia, me planteé en un momento dado dejar la investigación porque me estaba afectando muchísimo física y psicológicamente.

Me trasladé a Lyon, a una escuela normal. Las écoles normales en Francia son centros de investigación pura en los que se paga a personas que van a empezar su tesis porque están cuidadosamente seleccionadas. Básicamente, se trata de una institución de educación superior de alto nivel para estudios avanzados de pregrado y posgrado unificada con un centro de investigación. En Lyon, compartía seminarios y aprendizajes con otras personas de la escuela normal. Esto distorsionó en cierto sentido un inicio en la investigación tranquilo. Como empecé a trabajar en el área de la geometría y la topología, accedí a un mundo muy masculinizado. A una investigación ya de por sí dura, se sumó el hecho de ser casi la única mujer en grupos en los que había aproximadamente 30 chicos con dinámicas excesivamente competitivas y dañinas. Hacer una tesis es complicado porque a veces te bloqueas, estás atascada y tienes la sensación de que no avanzas, así que estar en un grupo competitivo es muy perjudicial.

Pero, bueno, es, en cierto sentido, cuestión de tener suerte, porque hay de todo. Existen grupos de trabajo realmente agradables. Por ejemplo, en mi universidad, en estos grupos en los que te incorporas, la gente intenta aprender, compartir, te escucha y te ayuda a limar las cosas que haces mal.

Estadísticamente, parece bastante claro que la edad *natural* de las mujeres para ser madres supone un punto de inflexión en el que comienza a haber disparidad de salarios y de porcentajes de hombres y mujeres en la investigación. Es decir,

ser mujer, madre e investigadora no es una tarea fácil y, por desgracia, la maternidad condiciona las posibilidades de promoción en la universidad. ¿Qué medidas o decisiones políticas piensas que deberían tomarse ante esta situación?

Sin duda, ése es un problema, pero no creo que sea el único. Cuando me preguntan por el tema de la maternidad, siempre matizo porque no es simplemente una cuestión de tener hijos o no; ése es un problema añadido, pero no es el fundamental. Hay un problema general de sexismo y de maneras de comportarse. Los ambientes académicos están muy jerarquizados y hay muchos egos en juego. Es un mundo muy competitivo en el que a veces nosotras tenemos las de perder. Es cierto que cuando empiezas a hacer una tesis, también comienzas a detectar que hay cosas que no funcionan igual para los hombres que para las mujeres. Pero esto pasa en ciencias y en todos los ámbitos. Es decir, no es un problema de sexismo exclusivo de la academia. Vivimos en un sistema patriarcal, en el que los roles están fuertemente establecidos y eso es lo que hay que atajar.

En cuanto a qué medidas se pueden adoptar, diría que, por ejemplo, el no tener en cuenta en los currículums de las mujeres las paradas por bajas maternales es algo que podría funcionar bien. Es decir, la idea sería que, si tienes una beca, se detenga durante los meses de maternidad y se prolongue posteriormente para incorporar ese tiempo. De esta forma, el *bache* que puedas tener por una maternidad o por el cuidado de una persona dependiente no afectaría a tu currículum. A veces, la única manera de conseguir pequeños logros es obligando a que las cosas funcionen. Creo que hay muchas medidas en el ámbito académico y social que están empezando a forzar la desaparición del sexismo en el mundo laboral y en muchos otros.

“

A veces, la única manera de conseguir pequeños logros es obligando a que las cosas funcionen. Creo que hay muchas medidas en el ámbito académico y social que están empezando a forzar la desaparición del sexismo en el ámbito laboral y en muchos otros.

Por otro lado, el tema de la educación es fundamental. Pero, cuidado: no olvidemos que educar en el cole a niños y niñas en igualdad es inútil si en casa se encuentran con un escenario completamente opuesto; justamente, lo que más influye es lo que pasa en el hogar.

La educación es clave porque cuando llegas a la universidad decides qué quieres estudiar en base a todo lo previo. Tenemos que empezar a asumir que los niños y las niñas no hacen lo que quieren, sino lo que todo el entorno que tienen a su alrededor les empuja a realizar. Muchas veces, a las personas que estamos siempre con este tema, nos dicen: “qué pesadas sois, dejad a las niñas que hagan lo que quieran”. Justamente en eso estamos. Para que las niñas hagan lo que quieran, tienen que saber que no están actuando con libertad porque todo lo que pasa a su alrededor les influye. Por supuesto, tampoco los niños eligen con libertad, pero la manera en que lo hacen ellos supone que les vaya, en general, mejor en la vida.

Para que haya más niñas ingenieras tendrá que haber seguramente más niños maestros. Hay que intentar que la sociedad en su conjunto (los niños y las niñas no pueden realizar esto solos) comprenda que hay un modelo de masculinidades que no son tan corrosivas. Se puede ser un hombre maravilloso siendo un enfermero o un maestro. Y se puede ser una mujer absolutamente femenina, si a alguien le preocupa eso, sea lo que sea la feminidad, siendo una ingeniera que lidera un grupo o una matemática que está haciendo una tesis sobre algo muy teórico o que está al frente de un proyecto de investigación con unas aplicaciones maravillosas.

En 2008 accediste a tu posición actual como Profesora Agregada de Geometría y Topología de la UPV y desde siempre has manifestado que te encanta la docencia. ¿Cómo crees que deben enseñarse las matemáticas en la universidad? ¿Cómo se debe enfocar un plan educativo de matemáticas?

Creo que es muy necesario y muy importante tener tiempo. Dejando a un lado el tema de los contenidos, hay que tener tiempo para asentar ideas, para reflexionar y para asimilar. Por desgracia, lo hacemos todo demasiado rápido y con muchas asignaturas por cuatrimestre. Sobre todo, en los primeros cursos, que son fundamentales, algo que se está haciendo mal en este momento es no dejar *jugar* al alumnado con los conceptos básicos, para que los descubran y las ideas se asienten bien; que juegue el juego de la lógica. Deberíamos pensar en esto y que en el primer y segundo curso se den menos contenidos, pero que se den bien. Se imparte todo muy deprisa y eso hace que el alumnado no comprenda ciertas ideas porque le falla la parte lógica. Es decir, el problema no es que no entienda, por ejemplo, el concepto topológico que le estoy explicando, sino que falla la parte técnica o lógica. Esto es una lástima porque, al fin y al cabo, se están formando profesionales de las matemáticas. Esa parte del savoir faire, del oficio, les cuesta mucho porque no se toma el tiempo suficiente para dejar que fluya. Insisto de nuevo en que el tiempo es fundamental para el aprendizaje. Sin contar tantas cosas, es preferible repetir, repensar, mirarlo todo desde diferentes puntos de vista y tomárselo con un poquito más de calma.

¿Cómo podría llevarse a cabo esto de tener más tiempo?

Supondría un cambio de plan de estudios y esto es muy complejo porque tiene que pasar por muchos procesos. Creo, no obstante, que debería tratarse con cuidado. Existen foros, como el Ciemat, donde esto se puede hablar. A veces nos olvidamos de que las universidades no son fábricas de profesionales para las empresas, sino que son lugares donde se forma a las personas. En muchas empresas contratan a gente que ha hecho el grado en matemáticas porque la cabeza está amueblada de una forma distinta. Lo demás se puede aprender más tarde. Hay que tener en cuenta que cuando acabas la carrera y comienzas a trabajar te vuelven a formar, pero tienes que tener un serie de condiciones previas para que la nueva formación tenga éxito. Para conseguir esto, hay que convencerse de que el potencial que se debería tener cuando se termina una carrera no supone saber mucha topología o álgebra lineal. Lo fundamental es que, a medida que te enseñan estas cosas, la mente se vaya estructurando. Es decir, lo más importante cuando se abandona la universidad es la cabeza o la manera de afrontar los problemas. Esto se logra con un poco de calma. Como dije antes, no es necesario dar tantas cosas. Simplemente, hay que darlas bien.

Hay una cuestión problemática vinculada con la creatividad de las matemáticas. En la carrera aprendemos teoremas *fuertes*, que aplicamos para solucionar problemas. Por supuesto, no todo es exactamente así, pero la mayoría de veces no hay un proceso creativo (en contraste, por ejemplo, con el tipo de ejercicios que se plantean en las Olimpiadas matemáticas). ¿Cómo crees que debería enfocarse en un plan educativo de matemáticas el asunto de la creatividad? ¿Te parece central?

El problema es que cuando hay un programa establecido no tienes todo el tiempo que te gustaría para hacer otro tipo de actividades. Aquí, en la Universidad del País Vasco, tenemos unas clases llamadas seminarios, donde se plantea un problema y se resuelve de manera colectiva. En principio, este es un entorno para que esa creatividad fluya.

Sin embargo, a veces no funciona bien. La gente acude a una Olimpiada Matemática con un interés especial, pero en un aula hay muchas personas que no están al día con los contenidos o que no se atreven a hablar. Por desgracia, la gente se calla mucho en clase. Entre unas treinta o cuarenta personas, a menudo, hablan cuatro o cinco. Si solo juegan cuatro, en el fondo, te preguntas: "¿para qué?" Deberíamos tener la confianza suficiente para decir tonterías; es maravilloso cuando decís una tontería.

Además, hay demasiados alumnos en las clases. Ojalá tuviéramos el tiempo y la manera de poder incentivar esa creatividad en pequeños grupos.

El relevo generacional en la universidad está siendo difícil. Por un lado, el profesorado universitario está muy envejecido. Por el otro, los jóvenes, es decir, los nuevos docentes, lo tienen muy difícil para acceder a puestos buenos. Acaban teniendo unas condiciones laborales muy precarias, con bajos salarios, y se ven obligados a ser pluriempleados. ¿Cómo crees que debería llevarse a cabo el proceso de renovación de la universidad ahora que cada vez más profesores se están jubilando?

Como tú dices, se está produciendo una gran cantidad de jubilaciones en todas las universidades. Además, el tema de la Covid-19 ha sido el detonante de muchas jubilaciones anticipadas. La no presencialidad es muy dura, sobre todo para la gente de mi generación que llevamos más de treinta años dando clase. Un aula nos llena, pero dar clase online nos cuesta mucho.

La cuestión no es exactamente que haya precariedad. En lo que yo conozco, no hay tanta. En mi universidad, por ejemplo, se hacen unos contratos de plazas llamados "de adjunto" en los que se dejan cuatro o cinco años para afianzarse y acreditarse hasta, finalmente, acceder a una plaza de agregado. Los jóvenes no entran en condiciones tan malas. En mi época también entrábamos en precario, sin tesis y recién licenciadas, porque había verdaderas necesidades docentes, especialmente en universidades jóvenes, como la del País Vasco. La precariedad que, desde luego, no debería existir, no es un tema nuevo. No hay que conformarse, pero creo que, en realidad, el principal problema que estamos encontrando es que no hay candidatos suficientes para ocupar la gran cantidad de plazas que hay (y va haber) en todas las universidades españolas. Es complejo entrar, tener que dar clases y seguir investigando para poder acceder a una plaza mejor. Ojalá las condiciones fueran mejores, pero ahora, al menos, va a haber trabajo.

Aprovechando que mencionas la falta de candidatos y candidatas, quería hablar contigo sobre el profesorado de matemáticas de secundaria. Este verano han tenido lugar las oposiciones a profesor/a de secundaria, en las que más de 720 plazas han quedado desiertas. Los matemáticos/as están hoy en día muy cotizados en el mercado laboral. En los últimos tiempos, las bolsas de interinos se cubren con personas sin la misma formación; provienen de Química, Arquitectura, una ingeniería o Económicas. ¿Crees que esto puede ir en detrimento de la formación matemática del alumnado?

Esto ha pasado porque las pruebas de las oposiciones se han hecho más duras, precisamente para intentar que quienes entran como docentes en enseñanza secundaria sean profesionales de las matemáticas. Mucha gente se ha quedado fuera. Anteriormente, como el temario y los exámenes eran muy fáciles, en muchas ocasiones aprobaban las oposiciones personas con lagunas matemáticas o sin especial interés en las matemáticas. Así, el endurecimiento de las pruebas fuerza a que quienes están de interinas tengan una mejor formación matemática.

En realidad, esto que comentas ha pasado siempre. Cuando yo iba al instituto, en los tres cursos de BUP y COU, solo una persona de todas las que me dieron clase de matemáticas había estudiado matemáticas. Desde luego, que te enseñe matemáticas alguien que conoce todos los recovecos de ciertos temas no es comparable a que lo haga alguien que las ha aprendido *de aquella manera*. Si una persona que no ha estudiado matemáticas entra a dar clases, tendrá que molestarse en formarse para poder enseñar como lo haría alguien que sí ha cursado el grado en matemáticas, que sabe muchas más cosas y tiene la cabeza amueblada de distinta manera. La pasión por lo que se está enseñando es, en cualquier caso, fundamental. Se nota mucho cuando te gusta lo que estás contando. Tanto en secundaria como en la universidad hay que ponerle ganas.

Además de docente e investigadora, eres una gran divulgadora. Uno de los temas en los que se centra tu labor de divulgación científica es la presencia de las matemáticas en la literatura. Has estudiado el contenido científico y la estructura matemática de textos que van desde la novela al tebeo, pasando por piezas teatrales y poesía. Además, eres la responsable de las secciones de *Literatura y Matemáticas* y de *Teatro y Matemáticas* en el portal DivulgaMAT de la RSME. Cuéntanos un poco más acerca de este tipo de iniciativas que vinculan las matemáticas y la literatura.

A mí me encanta la lectura y, cuando empecé con la divulgación, hace casi treinta años, lo hacía así, con este tipo de iniciativas, casi por provocar. Me parecía importante que abandonáramos esa historia de "es que yo soy de letras", "es que yo soy de ciencias". Mi punto de partida era la idea de que las matemáticas están en todos los aspectos de la vida, así que la literatura, que cuenta historias de la vida, no podía dejar de contener mates. "Veamos, entonces, qué matemáticas hay en los libros", me decía. La búsqueda no hay que forzarla; apostaría a que cualquier libro tiene matemáticas dentro. Las matemáticas y la literatura comparten un espacio, de la misma manera que lo hacen otras áreas o disciplinas.

Lo veía como una iniciativa bonita, porque me parece fundamental reivindicar la lectura. Uno de los problemas que tiene nuestro alumnado en la universidad es de comprensión lectora. En muchas ocasiones, la cuestión no es que no sepan hacer un ejercicio, sino que no lo han leído bien. Al igual que hay que hacer matemáticas sosegadas, soy una gran reivindicadora de una lectura sosegada. En esta fusión de dos disciplinas aparentemente separadas (aunque, de hecho, para nada lo estén), se reivindica una cultura con mayúsculas. Creo que hacer divulgación a través de la literatura es una manera de romper fronteras y de mostrar que la cultura y la vida son mestizas.

Hay ejemplos de matemáticas en la literatura y de literatura en las matemáticas absolutamente excepcionales. Al hecho de que la literatura trate las mates, se añade que, en muchas ocasiones, textos literarios han inspirado teoremas. Por ejemplo, hay teoremas que han surgido de formas poéticas, al plantearse si dicha forma elaborada de una manera particular podría generalizarse a otro tipo de versos. Eso ha dado lugar a un teorema en combinatoria, que dice que la respuesta es que no es posible; solamente se puede hacer para un tipo concreto de números. Es muy poético que la expresión literaria dé lugar a un teorema.

Tendemos a parcelar el conocimiento, en vez de desarrollar una perspectiva más humanista, aunque, al final, de lo que se trata es de enriquecerse. ¿Por qué crees que pasa esto?

Creo que es por miedo. Nos sentimos más tranquilos si estamos en nuestro pequeño coto con un *pequeño*

"

El tiempo en matemáticas para mí es muy importante, hay que tener tiempo para asentar ideas, para reflexionar y para asimilar.

> *Es importante no dejar de aprender a ninguna edad y atreverse a estar en las fronteras donde, como ocurre con las fronteras de los conjuntos, realmente las cosas son divertidas.*

conocimiento. Mantenerse en ese espacio nos permite vencer las inseguridades que tenemos todas las personas.

No obstante, es importante no dejar de aprender a ninguna edad y atreverse a estar en las fronteras donde, como ocurre con las fronteras de los conjuntos, realmente las cosas son divertidas. Si permaneces en el interior del conjunto, en tu coto, trabajas únicamente sobre lo tuyo. Sin embargo, si te sitúas en la frontera y tomas un entorno, como cortas también al complementario, ves cosas realmente interesantes que pueden ayudarte a entender qué pasa en tu lado. Arriesguémonos, ¡hay mucha frontera para cruzar!

Llevas a cabo numerosas actividades desde hace años con una intensa y meritoria contribución a favor de la visibilidad de las mujeres en las matemáticas y en la ciencia en general. De hecho, eres editora del blog *Mujeres con Ciencia*, la plataforma de referencia en España en esta materia que está impulsado por la Cátedra de Cultura Científica de la Universidad del País Vasco. ¿Cómo surgió este proyecto?

Mujeres con Ciencia es uno de los cuatro blogs de la Cátedra de Cultura Científica y surgió en el año 2013. El responsable de la cátedra me contactó. Sabía que yo formaba parte de muchas comisiones de igualdad, y era conocedor de mi preocupación y mi militancia en el tema de la reivindicación de las mujeres, en todos los ámbitos, pero en particular en el de la ciencia.

Me preguntó si pensaba que podría haber contenido suficiente para rellenar un blog sobre mujeres y ciencias y que si me gustaría ser la editora del mismo en caso de que lo lanzaran desde la Cátedra. Le dije que sí sin pensarlo porque vi que era una oportunidad maravillosa para hablar de mujeres referentes en la actualidad con el paraguas de la universidad. Como este blog surge de una Cátedra, tenía la protección de la institución. Creo que es muy importante partir de una estructura que ya tiene sus maneras de difundir y de la que la propia universidad está orgullosa.

En el blog, publicamos a diario. Hay una infinidad de mujeres para añadir todos los días una biografía, una efeméride, una actividad.... Muchísimas mujeres merecen estar allí, pero hay que gestionarlo.

El inicio de este proyecto fue muy complicado. Sin embargo, a día de hoy, tras siete años, tengo el orgullo de contar que hay muchas mujeres, y algunos hombres también, que nos dicen: "Conozco una historia de una mujer que es maravillosa. ¿La puedo escribir para *Mujeres con Ciencia*?". Es precioso ver la ilusión con la que nos contactan para poder compartir la historia de una científica que acaban de descubrir y que piensan que el resto del mundo debe conocer. Siento que somos un atractor de conocimiento en ese sentido. Hay muchas manos escribiendo en el blog, con miradas muy distintas y, sobre todo, con mucho cariño. Para mí eso es fundamental. *Mujeres con Ciencia* tiene unas dosis de cariño maravillosas.

Fuiste miembro de la Comisión de Mujeres de la Real Sociedad Matemática Española (RSME). ¿Podrías contarnos en qué consiste esta iniciativa?

Fundamentalmente, la comisión se dedica a tratar temas vinculados con la desigualdad de género. Está integrada por personas preocupadas por esta problemática, que sacan a relucir casos de discriminación, siendo especialmente conscientes de las desigualdades en el desarrollo profesional y en la decisión vocacional de elegir carreras próximas a esta ciencia. También hablan de mujeres referentes.

El año pasado se publicó el Libro Blanco de las Matemáticas, dirigido y coordinado por la Real Sociedad Matemática Española con el apoyo de la Fundación Ramón Areces. El libro está organizado en ocho líneas de análisis interconectadas: enseñanza de las matemáticas, salidas profesionales, investigación, impacto económico de las matemáticas en nuestro sistema productivo, divulgación, problemáticas de género y premios y reconocimientos científicos. En el capítulo que trata sobre la igualdad de género en el ámbito de las matemáticas, se manifiesta el compromiso de la Real Sociedad Matemática Española con este tema, lo que llevó a la constitución de la comisión Mujeres y Matemáticas.

Estamos en un momento en el que la conciencia y preocupación por la desigualdad de género está en la agenda política y social, en algunas ocasiones, desgraciadamente, sin un convencimiento real. Desde su constitución, la comisión ha realizado en torno a esta temática diversos estudios, análisis, actividades y colaboraciones con diferentes entidades, vigilando conductas discriminatorias, como, por ejemplo, la organización de un congreso en el que no se ha invitado a ninguna mujer.

¿Cómo crees que ha evolucionado la visión de la sociedad sobre las matemáticas?

Creo que ha evolucionado a mejor. Hace cuarenta años, cuando comencé la carrera, el grado en matemáticas estaba orientado fundamentalmente a la docencia. Por eso, socialmente, éramos percibidos como una "panda de frikis". Era común escuchar comentarios que reforzaban esa especie de estereotipo de que la gente de matemáticas éramos unos raritos: "¿tú eres matemática? Pues no tenías cara de rara".

Sin embargo, hoy en día es una carrera sin prácticamente paro porque muchas empresas demandan personas con formación matemática. Así, la carrera está mucho más cerca de la sociedad. La gente ve que se contrata a personas graduadas en matemáticas para trabajos que no son necesariamente de tipo docente. Hay muchas salidas laborales, uno se coloca muy bien y asciende rápido en el ámbito profesional. Todo esto ha transformado la percepción social de las matemáticas. Ahora no parecen tan terribles. Se valoran más porque socialmente se aprecia lo que tiene éxito.

Entonces, ¿consideras que ahora la gente valora más las matemáticas?

Lo creo profundamente. Además de lo que acabo de comentar, se está haciendo mucha labor de divulgación. Por ejemplo, todo el mundo entiende que en la pandemia de la Covid-19 la modelización matemática puede ayudar a prever cómo va a evolucionar la situación. También se reconoce que la labor estadística es fundamental. En general, socialmente se percibe que las matemáticas ayudan a entender la realidad o cualquier acontecimiento, como la erupción del volcán de La Palma. Por supuesto, sería muy soberbio decir que son lo más importante, pero, en cualquier caso, son una parte fundamental para comprender cómo puede solucionarse o evolucionar un problema.

Por último, una pregunta de filosofía de las matemáticas. No hay duda de que las matemáticas resultan excepcionalmente eficaces para describir y explicar el universo. James Jeans, físico británico, afirmaba que el universo parecía haber sido diseñado por un matemático puro. Einstein se preguntaba cómo es posible que un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, las matemáticas, se ajuste de modo tan perfecto a los objetos de la realidad física. ¿Son las matemáticas una creación humana o nos permiten vislumbrar e ir descubriendo el intrincado diseño del universo? Es decir, ¿las matemáticas se inventan o se descubren?

Esa pregunta es súper difícil. Creo que hay parte inventada y hay parte, seguramente, descubierta. Al margen de la respuesta, sea cual sea, no hay que idealizar las matemáticas. Sin duda, nos ayudan a solucionar problemas, a modelizar situaciones y nos hacen disfrutar. Quizá hasta nos permitan comunicarnos con un extraterrestre por aquello de que el lenguaje matemático es universal. Pero es muy importante entender que la vida no es solamente trabajar, ni ganar dinero, ni saber matemáticas. Hay una parte humana esencial. Precisamente, el comportamiento humano, completamente azaroso, es muy poco matematizable. Eso es maravilloso. Si todo fuera modelizable matemáticamente, seríamos como robots. Por eso, hay que celebrar todo aquello absolutamente inspirador que se sale de un teorema matemático para vivir nuestro día a día de una manera creativa. Aunque las matemáticas son muy creativas, hay una parte de la creatividad que se les escapa. Es importante valorarlas, pero también es esencial apreciar todo lo demás que nos ofrece la vida. Hay que disfrutar con las mates y con lo que no son las mates.

Marta Macho, fotografiada por Mikel Mtz. de Trespuentes. UPV/EHU.

Una relación sorprendente

Poesía y matemáticas

Por Elena Köhler Ruiz
Ilustración de Irene Ramiro López

La conexión entre poesía y matemáticas puede resultar llamativa. El mundo de las matemáticas es lógico y objetivo, mientras que la poesía es subjetiva y está repleta de dobles significados. Sin embargo, varios autores han llamado la atención sobre el cruce ocasional de ambas materias. Esto nos lleva a plantear las siguientes cuestiones: ¿tienen las matemáticas influencia en la poesía?, ¿son los conceptos matemáticos objetos de inspiración para los poetas?, ¿podría existir incluso una relación más profunda entre dos disciplinas en apariencia tan distintas?[1]

La belleza poética del quinto postulado de Euclides

Euclid alone has looked on Beauty bare.
Let all who prate of Beauty hold their peace,
And lay them prone upon the earth and cease
To ponder on themselves, the while they stare
At nothing, intricately drawn nowhere
In shapes of shifting lineage; let geese
Gabble and hiss, but heroes seek release
From dusty bondage into luminous air.
O blinding hour, O holy, terrible day,
When first the shaft into his vision shone
Of light anatomized! **Euclid alone**
Has looked on Beauty bare. Fortunate they
Who, though once only and then but far away,
Have heard her massive sandal set on stone.

Edna St. Vincent Millay[2]

Euclides reunió en su obra Elementos gran parte del conocimiento de aritmética y geometría alcanzado en la época helenística[3]. El trabajo de este matemático griego, que vivió en la ciudad de Alejandría alrededor del siglo III a.C., es valorado como uno de las más relevantes en la historia de las matemáticas[4].

Una de las aportaciones más importantes de Euclides es un conjunto de cinco postulados que constituyó el punto de partida para la construcción de su geometría. Entre ellos, se encuentra la afirmación de que "un segmento rectilíneo siempre puede ser alargado" o que "hay una sola circunferencia con un radio y centro dados". Estos postulados, que pueden parecer en principio evidentes y sin mayor trasfondo, han determinado la forma que tenemos de concebir la geometría. Es difícil imaginar una introducción al mundo de las matemáticas en la infancia que no comience por explicar el concepto de punto, recta o círculo.

El último y menos evidente de los postulados euclidianos es el que ha tenido mayor relevancia en el desarrollo de las teorías matemáticas modernas. Este quinto postulado de Euclides, reformulado en el siglo XVIII en un enunciado equivalente (axioma de Playfair), afirma lo siguiente: "desde un punto exterior a una recta se puede trazar una, y sólo una, paralela a la misma"[5]. Durante mucho tiempo, los matemáticos se preguntaron si esta proposición podía ser demostrada a partir de los cuatro primeros postulados o si, por el contrario, era independiente de ellos.

La respuesta no llegó hasta el siglo XIX. Al parecer, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), una de las figuras más dominantes del periodo, dedicó parte de su vida al intento de demostrar el llamado "postulado de las paralelas" a partir del método de reducción del absurdo. Finalmente, se planteó la posibilidad de diseñar una nueva geometría, distinta a la euclidiana y consistente desde el punto de vista matemático. A partir de la negación del quinto postulado de Euclides, Gauss abrió la puerta a un campo completamente nuevo y lleno de posibilidades: acababa de nacer la geometría no euclidiana[6].

La historia del quinto postulado despierta fácilmente el interés de cualquier persona con gusto por el mundo de las matemáticas. Las razones son varias. La geometría euclidiana fue capaz de perdurar durante más de dos milenios y el análisis del "postulado de las paralelas" se convirtió en objeto de estudio de muchos matemáticos. Cuando un problema perdura durante tanto tiempo, a menudo su solución se convierte en la llave a un terreno inexplorado, como sucedió en este caso. Negar el quinto postulado no solo tuvo implicaciones enormes en la física, convirtiéndose a comienzos del siglo XX en una pieza fundamental de la teoría de la relatividad, sino que además proporcionó una visión distinta del campo de las matemáticas. Las demostraciones geométricas dejaron de basarse en figuras y la axiomatización utilizada por David Hilbert en su obra en 1899 cobró importancia. De esta forma, la geometría se alejaba del limitado mundo que observamos y podía comenzar a vislumbrar nuevos horizontes[7].

A pesar de que el largo camino recorrido por los matemáticos con el fin de demostrar o refutar el postulado de Euclides es fascinante, parece que la atracción por este tema es solo compartida por aquellos que tienen algunas nociones sobre ciencia. Es difícil a menudo explicar el empeño de los matemáticos que invirtieron tanto tiempo y dedicación en tratar de demostrar si realmente solo puede trazarse una recta paralela a otra desde un punto exterior a la misma. Abatidos y desilusionados por sentirse incomprendidos por su entorno, muchos matemáticos recurren a comentar las implicaciones que tienen algunas de sus indagaciones en el *mundo real*. Algunos, al ser preguntados si mereció la pena dos milenios de intentos fallidos de demostrar un postulado que acabó siendo refutado, hablarán de la relevancia de uno de los modelos no euclidianos, la geometría de Riemann, en el estudio de la relatividad general. Otros no dirán nada, refugiándose en la idea de que, por lo menos, unas pocas personas comparten con ellos la fuerte atracción por las soluciones rigurosas a problemas matemáticos.

Sin embargo, en este caso no ha sido exactamente así. El reconocimiento de la obra euclidiana no ha quedado limitado al mundo de las matemáticas. En 1922 la poeta Edna St. Vincent Millay, ganadora del premio Pulitzer de poesía, escribía el soneto que encabeza este artículo, donde expresa su admiración por la forma que tuvo Euclides de ver la realidad que le rodeaba. En su poema, afirma que "solo Euclides ha contemplado la belleza desnuda". Este verso, breve y sugerente, transmite admiración por la capacidad del matemático griego de entender de manera lógica y sencilla la realidad. El poema presenta un aire de misterio y aleja en cierta forma al lector de la posibilidad de entender realmente qué es esa "belleza desnuda" y por qué solo Euclides supo verla. Un matemático podría escribir un libro entero tratando de demostrar a un público general por qué es interesante la obra de Euclides. Y, sin embargo, nunca conseguiría expresarlo como lo hace el poema de Millay. Quizás sea la brevedad la clave del éxito, la economía del lenguaje. De la misma forma que la importancia de la obra Elementos no es otra que reunir en pocos postulados el conocimiento de geometría de toda una época.

Las matemáticas como fuente de inspiración de la poesía

El poema de Millay en honor a Euclides no es un caso aislado. Muchos artistas a lo largo de la historia han sabido apreciar la belleza de las matemáticas. Y no son pocos los poetas que han encontrado en los objetos matemáticos una mina de oro para sus metáforas y lenguaje simbólico.

Emily Dickinson, la conocida poeta estadounidense del siglo XIX, es un ejemplo de artista que se animó a explorar el área de las matemáticas. El profesor retirado Thomas L. Moore afirma en un artículo sobre este tema que Dickinson no solo estaba fascinada por las matemáticas, sino que además leía libros sobre esta materia de la misma forma que hacía con toda la literatura: empleándola como fuente de inspiración para su poesía[8]. En concreto, Moore sostiene que el libro utilizado por Dickinson para aprender sobre álgebra, An Introduction to Algebra (Jeremiah Day), presenta un lenguaje literario que pudo haber inspirado a la

poeta. De esta forma, Dickinson habría logrado apreciar la belleza de las construcciones matemáticas y, sobre todo, habría aprendido a transmitirla en su obra. Podemos ver un ejemplo de esto en la primera estrofa de uno de sus poemas.

I could suffice for Him, I knew—
He—could suffice for Me—
Yet Hesitating Fractions—Both
Surveyed Infinity—

Emily Dickinson[9]

El tema del poema es la relación de la voz poética con una divinidad a la que se alude en un inicio con el pronombre "He" y que más adelante, en la segunda estrofa, se denominará "God". Dickinson se inspira en el concepto de suma infinita de fracciones algebraicas. A medida que añadimos términos en la serie, nos acercamos cada vez más al valor numérico que esta representa.

La poeta comienza, empleando el término "suffice", con una igualdad aproximada entre ella y él: I≈Him y He≈Me. Según la interpretación de Moore, "He" no equivale al valor real, completo y perfecto, sino todo lo contrario. Es decir, la poeta no quiere expresar su impotencia al no ser capaz de alcanzar la perfección del Dios que admira. Por el contrario, si analizamos con atención el primer verso, observamos que está segura de ser suficiente para él y la cuestión que en realidad se plantea es si él lo es para ella. En términos matemáticos, "He" es la serie infinita y ella el valor real. Es más, la voz poética es quien tiene la capacidad de decidir la suficiencia de la aproximación mediante el estudio de la serie en el límite del infinito.

Dickinson proporciona en su poema una visión poco habitual de una relación espiritual con una divinidad. La poeta cuestiona que una creencia religiosa pueda ser adecuada para ella y está inmersa en la búsqueda de una relación estrecha con Dios que pueda satisfacerle. Para expresar este tedioso camino se imagina atrapada en una interminable suma de términos cada vez más insignificantes que va acercándose a su ideal, pero que nunca es suficiente. Entender esta referencia matemática es clave para poder comprender el significado del poema.

Fijémonos ahora en el ejemplo del poeta y doctor en lógica matemática Pedro Poitevin.

Evanescente

El mundo es una esfera sobre un plano
que se dilata indefinidamente.

En este punto yo; en aquel, mi hermano
ayer desvanecido en el poniente.

Aunque él yazca en el plano y yo en la esfera,
una línea nos une desde el polo.

Si me muevo, él se mueve a mi manera.
Si él se mueve, me mueve el no estar solo.

Ambos vamos en pos del infinito
por dos tenues senderos sobre el pasto.

Yo me aproximo al polo que medito
y él se aleja inconsciente hacia lo vasto.

Sin embargo, aún vislumbro a mi gemelo
en la estereografía del consuelo.

Pedro Poitevin[10]

El concepto de la proyección estereográfica inspira este poema. Para entenderlo, debemos pensar en un plano atravesando el ecuador de una esfera. A cada punto z del plano le corresponde exactamente un punto P de la superficie de la esfera y queda determinado por la intersección de la línea que atraviesa el punto z y el polo norte N. A este último punto N le correspondería el infinito, como se observa en la figura 1[11].

La interpretación matemática del poema de Poitevin es más evidente y directa que en el caso anterior. Tan solo debemos seguir de forma sistemática los pasos que se van indicando. Imaginemos dos gemelos, al primero le corresponde el punto P y al segundo el z. Es decir, uno se encuentra en la superficie de la esfera y el otro en el plano. Ambos están conectados por la línea recta que los une. Poco a poco, el punto P se va acercando al polo norte de la esfera. El punto z está, por lo tanto, cada vez más lejos, apenas puede ser ya vislumbrado ("ayer desvanecido en el poniente"). No obstante, ambos permanecen unidos, uno es la proyección estereográfica del segundo ("una línea nos une desde el polo"). La historia de los gemelos no tiene un final feliz. El punto P acabará en el polo norte de la esfera, infinitamente lejos del punto z ("él se aleja inconscientemente hasta lo vasto"). Los gemelos, que comenzaron juntos en el ecuador de la esfera, han quedado separados para siempre.

El título del poema nos permite tener una visión completa del significado. "Evanescente" hace referencia al fenómeno del "síndrome del gemelo desaparecido o evanescente", que sucede cuando uno de los dos fetos desaparece durante el embarazo.

La última referencia es quizás la más abierta a interpretación. Cuando el primer gemelo evoca a su hermano, dice que lo vislumbra en "la estereografía del consuelo". La voz poética mantiene la vaga esperanza de que su gemelo no haya desaparecido del todo, sino que exista la posibilidad de reencuentro en el infinito, o lo que el lector podría interpretar como la vida eterna tras la muerte.

Poitevin emplea las matemáticas para contar la historia de dos gemelos separados antes de nacer. El poema es cautivador incluso sin comprender la referencia a la proyección estereográfica, pero es indudable que el conocimiento de este concepto proporciona al lector una comprensión del mensaje poético mucho más completa y estimulante.

Los dos poemas comentados son completamente distintos y apenas presentan un elemento en común: las ideas matemáticas subyacentes a sus versos. Como estos ejemplos podríamos citar otros. Varios poetas se han inspirado en ideas matemáticas y, de hecho, existen obras completas sobre este fenómeno.

Por otra parte, la poesía no solo ha recibido influencia de las matemáticas en su contenido, sino también en la forma. Por ejemplo, el palíndromo es un tipo de estrofa que puede ser leída de izquierda a derecha o viceversa, recordando un número capicúa. . Una variante más reciente sería el aelíndromo, ideado por el poeta contemporáneo A. Etherin, a partir de secuencias numéricas con un determinado sentido matemático[12]. Fijémonos en el siguiente ejemplo, donde se ha optado por utilizar como patrón el número π.

***Low, fatal** nights! Late, moonless.... Tense, we glitch.*
We swim bled sky, along the ashy glow.
Shy glow along the ambled sky, we switch.
*We glisten -- see slate moonlight's n**atal flow**.*

Anthony Etherin[13]

Descomponemos los dos primeros versos de este poema en conjuntos de letras: A="low", B="f", C="atal"... Obtenemos un total de 14 conjuntos, que coincide con el número de cifras de la aproximación de π utilizada: 3,1415926535897. El número de elementos de cada conjunto es igual al dígito de π correspondiente. Es decir, |A|=3, |B|=1, |C|=4... Los dos últimos versos se construyen invirtiendo la secuencia de los dos primeros. Por lo tanto, la estructura **A-B-C**-D-E-F-G-H-I-J-K-L-M-N se convierte en N-M-L-K-J-I-H-G-F-E-D-**C-B-A**. Observamos que, efectivamente, los dos últimos conjuntos de letras son "atal", "f" y "low".

En general, existen varios tipos de rimas que remiten a estructuras matemáticas. Puede ser un juego entretenido para el lector experto llegar a visualizar en un poema el esquema de sus versos.

La influencia de la poesía en las matemáticas

En el anterior apartado se ha mostrado la intervención de las matemáticas en la poesía, tanto en el contenido como en la forma. Sin embargo, estoy segura de que una mente matemática se preguntaría por el proceso inverso: ¿tiene algún tipo de relevancia la poesía en el mundo de las matemáticas?

Con el fin de cerrar el círculo y establecer una correlación entre ambas disciplinas, una *doble implicación* hablando en términos matemáticos, procederé en este apartado a tratar esta cuestión. Aunque no sea evidente en un inicio, es posible sostener que las matemáticas se ven influidas de alguna forma por la poesía. Proporcionaré varios argumentos.

El primero es quizás algo ambiguo e incluso inocente. Me refiero a la idea clásica de que las matemáticas tienen una belleza intrínseca y que a veces la búsqueda de la perfección y la simetría permite el avance de la ciencia. Como puede deducirse del poema de Millay, los matemáticos son capaces de ver la "belleza desnuda".

Ron Aharoni sostiene en un artículo que la poesía y las matemáticas tienen un mecanismo común para "crear belleza"[13] . Afirma que ambas materias se ocupan de la búsqueda de patrones ocultos, son sorprendentes, presentan giros inesperados y, sobre todo, permiten cambios de perspectiva. Esta última característica es clave en muchísimos problemas de matemáticas y ciencia en general, puesto que ver las cosas de otra forma puede conducir a la solución deseada. En poesía, el cambio de perspectiva sucede a menudo cuando la idea principal no es expresada de forma directa, sino que el poeta evoca un tema en apariencia distinto. Con frecuencia proporciona equeños detalles para que el lector reflexione sobre el mensaje subliminal oculto en los versos y lo comprenda una vez logre por

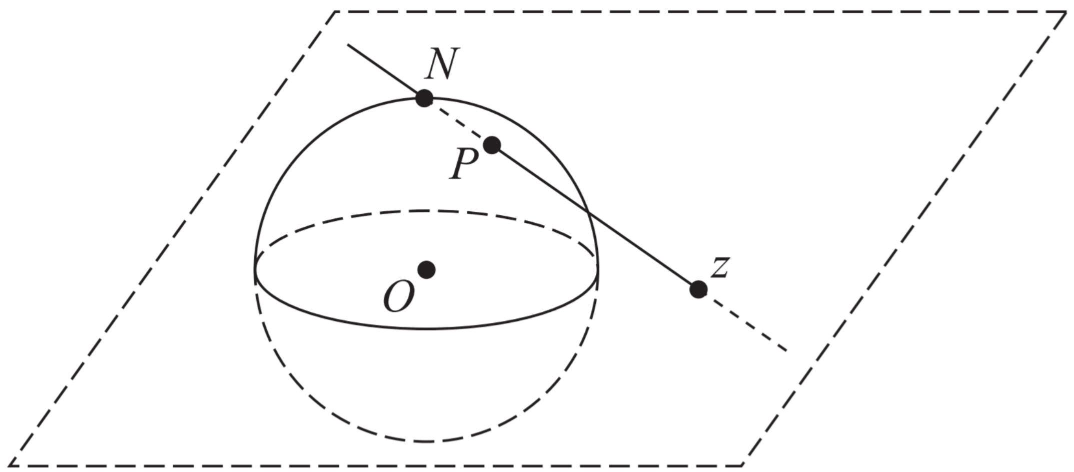


Figura 1. Proyección estereográfica.

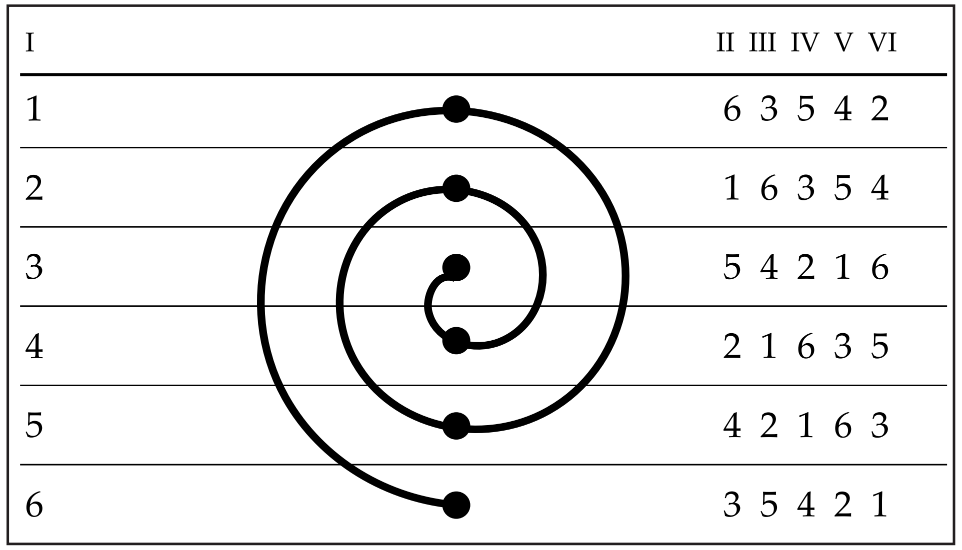


Figura 2. Esquema de la permutación de la sextina, en forma de espiral.

sí solo cambiar el punto de vista.

El lenguaje poético es variado y complejo en ocasiones. Las metáforas tienen el objetivo de estimular la imaginación del lector, creando un espacio libre de interpretación. Los poetas juegan con las palabras y las combinan para transmitir de formas distintas una misma idea. Curiosamente, los matemáticos hacen lo contrario. Tal y como enunció Poincaré en su famosa cita, "mathematics is the art of giving the same name to different things"[15]. En ciencia en general, fenómenos diferentes pueden ser descritos con ecuaciones similares. Encontrar conexiones entre áreas distantes es uno de los aspectos más creativos y bellos del proceso científico. En cualquier caso, tanto la búsqueda matemática de patrones comunes, como la habilidad poética de describir un mismo concepto de formas distintas, tienen un punto en común: ambas requieren creatividad e ingenio.

Algunos científicos han sostenido la idea, tal vez algo extravagante, de que hay ecuaciones poéticas en sí mismas, como la fórmula de Euler: $e^{i\pi} = -1$. Sin duda esta opinión es controvertida y depende mucho de la definición que se atribuya al concepto de *poesía*. No obstante, una cosa está clara: ciertas ideas, demostraciones y ecuaciones despiertan emociones entre quienes las estudian. Somos capaces de distinguir entre fórmulas más o menos populares y está claro que algunas de ellas sobresalen porque existe una opinión consensuada de que son bellas.

Es curioso comprobar cómo en un campo en principio tan lógico y objetivo como el de las matemáticas el ser humano es capaz de encontrar un lado estético y libre de interpretación. Un tema complejo y muy interesante es hasta qué punto la búsqueda de la simetría y la belleza ha contribuido al desarrollo de la ciencia o bien lo ha paralizado. ¿Tiene sentido el intento de construir matemáticas casi *poéticas*?

Hasta este punto la explicación que he dado de la influencia de la poesía en las matemáticas no deja de ser imprecisa y restringida a la opinión individual. Sin embargo, existe un caso excepcional en el que las matemáticas se han desarrollado a partir de la poesía. Me refiero a la estructura de la sextina, descrito con detalle por Poitevin en un artículo reciente[16].

La sextina es una composición formada por seis estrofas de seis versos y una final de solo tres. Su origen se remonta al siglo XII y se atribuye al trovador provenzal Arnaut Daniel[17]. Presenta una estructura singular que consiste en la repetición de las últimas palabras de cada estrofa en las siguientes, pero alterando el orden de aparición.

Si consideramos que a la palabra final de cada uno de los seis primeros versos de la sextina le corresponde un número, podemos describir la primera estrofa con la secuencia 123456. Siguiendo esta notación, el poema completo puede representarse de la siguiente forma: 123456, 615243, 364125, 532614, 451362, 246531, 531. La última estrofa reúne de forma habitual las seis palabras finales del resto del poema, dos por verso. En el análisis que realizaremos a continuación nos centraremos exclusivamente en las seis primeras estrofas.

La estructura corresponde a la permutación (1,2,4,5,3,6) y puede ser representada como se muestra en la figura 2. Si recorremos la espiral comenzando en el número 6 obtenemos la secuencia de la segunda estrofa a partir de la primera. El término que hemos designado con el número 6 pasa a la posición primera en la segunda estrofa de la sextina, el 1 acaba en posición segunda y así sucesivamente[18].

El escritor y poeta Raymond Queneau (1903-1976)[19] se interesó en la estructura de la sextina y se preguntó cómo podría generalizarse este caso particular a un poema de n estrofas y n versos. Más adelante, M. Bringer[20] formalizó en términos matemáticos esta estructura, definiendo una permutación σ_n del grupo simétrico de n elementos S_n (ver ecuación). Bringer denominó al subgrupo de Sn generado por σ_n *grupo de Queneau-Daniel*.

$$\sigma_n(m) = \begin{cases} m/2 & si\ m\ es\ par \\ n-(m-1)/2 & si\ m\ es\ impar \end{cases}$$

Se observa que, en el caso de la sextina, $\sigma_6(1)=6$, $\sigma_6(2)=1$, $\sigma_6(3)=5$ y así para el resto de números representando las últimas palabras de los versos, tal y como hemos descrito anteriormente. Una propiedad relevante de la sextina ($n = 6$) es que el subgrupo generado por σ en el grupo de permutaciones de seis elementos es cíclico de orden seis. Es decir, $\sigma_6^6 = \epsilon$, donde ϵ denota la permutación identidad y $\sigma_6^p \neq \epsilon$ con $p < 6$. Por lo tanto, si aplicamos la permutación σ_6 a la última estrofa recuperamos la estructura de la primera. No todos los números enteros cumplen esta propiedad. Un contraejemplo es $n = 4$ (ya que $\sigma_4^3 = \epsilon$).

Los números enteros para los que la permutación σ_n en S_n tiene orden n se denominan admisibles o números de Queneau. Sobre ellos se han llegado a varios resultados interesantes, reunidos por Asveld[21]. Por ejemplo, puede demostrarse que si n es admisible, entonces $2n + 1$ es un número primo. Por lo tanto, es posible definir un grupo de números primos asociados a los n de Queneau.

Ahora bien, sigue abierta la siguiente pregunta: ¿cuántos números admisibles existen? La cuestión puede abordarse a partir de la conjetura de Artin sobre raíces primitivas. Esta implica que existen infinitos números admisibles de Queneau. Dicho en otras palabras, si la conjetura fuera demostrada podría afirmarse que existen infinitas formas de construir composiciones poéticas con estructuras análogas a la de la sextina, cada una de ellas correspondiente a un n diferente.

En suma, es posible conectar una de las conjeturas más importantes en la actualidad con un poema escrito por un trovador provenzal del siglo XII. Lo más probable es que Arnaut Daniel no fuera consciente de la relevancia de haber escogido el número 6 para su composición poética y que no estemos más que ante una coincidencia afortunada. Sea como fuere, es un claro ejemplo de cómo, aunque de forma puntual, la poesía ha inspirado el desarrollo de nuevas ideas matemáticas, y el uso de patrones comunes permite percibir ciertos paralelismos entre ambas disciplinas.

La sandalia de Euclides

Como se ha demostrado, en ocasiones la poesía y las matemáticas se han influido mutuamente. Incluso, salvando las distancias, podríamos considerar que no son disciplinas tan dispares, pues comparten un mismo interés por las estructuras lógicas y la estética. Y, sobre todo, porque pocos versos y ecuaciones son capaces de transmitir ideas complejas.

Es cierto que las matemáticas y la poesía no se necesitan para existir, sino que se dan de modo independiente; sin embargo, no podemos ignorar las distintas formas en que pueden llegar a relacionarse. Al fin y al cabo, existen muchas maneras de contar una misma historia. Podemos hablar del quinto postulado de Euclides, su largo y complicado desarrollo y la enorme influencia que ha tenido su refutación en el origen de una nueva geometría que ha cambiado nuestra forma de entender la realidad. Pero también podemos prescindir de todo el discurso anterior y limitarnos a recrear la imagen de Euclides paseando por las calles de Alejandría, vestido con una larga túnica blanca.

El matemático griego camina por el suelo empedrado y piensa. Podemos intuir, aunque nunca llegaremos a comprenderlo del todo, cómo observa la realidad y la reinterpreta en términos de figuras geométricas.

Han pasado más de dos mil años, pero, como supo expresar Millay[22], el ruido de su enorme sandalia al golpear contra la piedra sigue y continuará resonando eternamente. Aunque nos hayamos alejado de sus enseñanzas, a pesar de que el mundo sea distinto, jamás dejaremos de escuchar el ruido de la sandalia de quien fue capaz de ver la "belleza desnuda".

Referencias

1 Las ideas expresadas en este artículo son fruto de la reflexión que me han suscitado distintas lecturas sobre el tema y los contenidos aprendidos en el curso online Poesía y Matemáticas dirigido por Pedro Poitevin (Academia Oralitura, 2020)
2 E. S. V. MILLAY, *The Selected Poetry of Edna St. Vincent Millay*. Modern Library (2012) p. 155
3 B. ARTMANN, *Euclid. The creation of mathematics*. Springer Science & Business Media (2012) p. 15
4 J. MUMMA, *Proofs, pictures, and Euclid*. Synthese (2010) 175, 255–287 p. 255
5 A. I. RAMÍREZ-GALARZA & G. SIENRA-LOERA, G., *Invitación a las geometrías no euclidianas*. UNAM (2000) p. 13
6 H. E. WOLFE, *Introduction to non-Euclidean geometry*. Courier Corporation (2012) pp. 46-49
7 N. MILLER, *Euclid and his twentieth century rivals: Diagrams in the logic of Euclidean geometry.* Stanford: CSLI Publications (2007) p. 3
8 T. L. MOORE, *QED: What Emily Dickinson Did With Her Mathematics Books*. The Emily Dickinson Journal 27(1) (2018) pp. 45-73
9 E. DICKINSON, *The Poems of Emily Dickinson: Reading Edition*. Belknap Press (712) (2005)
10 https://lalibelulavaga.com/2020/08/07/pedro-poitevin-un-fluir-delicado-de-la-mente-al-mundo [consulta 18/09/2021]
11 J. W. BROWN & R. V. CHURCHILL, *Complex variables and applications seventh edition.* McGraw-Hill Book Company (2004) p. 49
12 A. ETHERIN, *Stray Arts (and Other Inventions),* Penteract Press (2019)
13 https://poetrywithmathematics.blogspot.com/2021/11/aelindromes-and-pi.html [consulta 20/11/2021]
14 R. AHARONI, *Mathematics, poetry and beauty.* Journal of Mathematics and the Arts (2014), 8(1-2), 5-12
15 F. VERHULST, *Mathematics is the art of giving the same name to different things: An interview with Henri Poincaré. Nieuw archief voor wiskunde*. Serie 5, 13(3), 154-158 (2012)
16 P. POITEVIN, *Ciencia, matemáticas y poesía. Figuras*. Revista académica de investigación (2020), 1(3) pp. 40-41
17 La sextina completa de Arnaut Daniel traducida al español puede encontrarse en Jiménez, J. C. (2006). Teoría y práctica de la sextina en su inventor, Arnaut Daniel, y su repercusión en la literatura española. *La cultura del otro: español en Francia, francés en España* (p. 61). Universidad de Sevilla
18 M. P. SACLOLO, *How a medieval troubadour became a mathematical figure.* Notices of the AMS (2011), 58(5)
19 Queneau es el cofundador del grupo de experimentación literaria OuLiPo, cuyo fin es emplear las matemáticas como inspiración para la creación de poemas y textos literarios
20 M. BRINGER, *Sur un problème de R. Queneau.* Mathématiques et Sciences humaines (1969) 27, 13-20
21 P. R. ASVELD, Queneau Numbers—Recent Results and a Bibliography. *CTIT Technical Report Series* (2013), (TR-CTIT13-16)
22 Vid. referencia 2

PROBLEMAS ABIERTOS

Para quienes las ven desde fuera o para los que aún estamos aprendiendo los fundamentos, puede parecer que las matemáticas son una disciplina fascinante pero terminada, en la que todos los descubrimientos los agotaron ya Gauss, Euler o, a más tardar, Hilbert. Afortunadamente para los que aún busquen romperse un poco la cabeza, la realidad es muy distinta: los problemas que quedan por resolver son tantos como podamos imaginar. En esta sección queremos dar una muestra de ello presentando algunas preguntas que se han planteado en la comunidad matemática pero nadie aún ha conseguido responder aún.

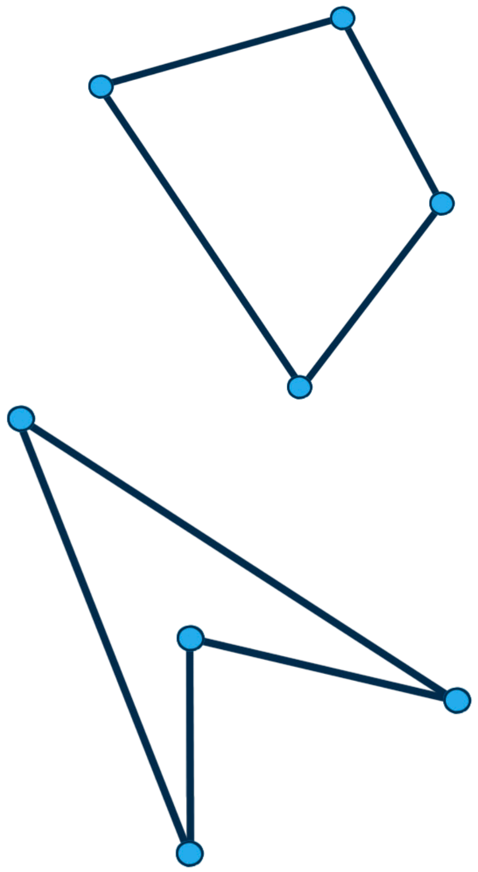
Quién sabe si, quizás, alguien entre nuestros lectores encontrará la clave para alguno de estos problemas abiertos...

Por Julián Allwright González y Fernando Benito Fernández de la Cigoña
Ilustraciones de Carla Moreno Basteiro

Hoy traemos dos problemas de combinatoria geométrica en el corazón de la Teoría de Ramsey que han merecido la atención de matemáticos de la talla de Paul Erdős.

1. El problema del final feliz.

El clásico pasatiempos infantil “une los puntos” (donde hay que unir unos puntos numerados con líneas rectas en orden para revelar un dibujo final) puede parecer de lo menos desafiante, y en general de poco interés desde el punto de vista matemático. Sin embargo, todo es cuestión de plantear la pregunta adecuada. Dado un conjunto de puntos en el plano, diremos que están en *configuración general* si no hay tres de ellos que estén alineados. Llamaremos polígono a la figura cerrada resultante de unir estos puntos (saliendo de cada punto únicamente dos líneas) de manera que no haya dos de ellas que se crucen. Y aún más, diremos que este polígono es convexo si al alargar los segmentos que conforman sus lados, las prolongaciones tampoco cortan a ningún otro lado. De lo contrario, diremos que el polígono es cóncavo.



Un cuadrilátero (polígono de cuatro lados) convexo y uno cóncavo.

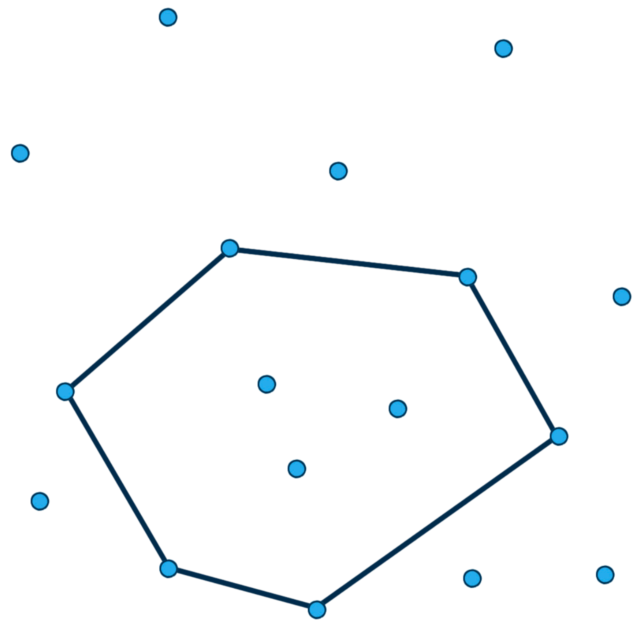
En 1933, Esther Klein, una estudiante de Física de Budapest, observó lo siguiente:

Si situamos cinco puntos en el plano en configuración general, siempre es posible seleccionar cuatro de ellos formando un cuadrilátero convexo.

¿Podrías probar la observación de Esther Klein?

Por aquel entonces, ella formaba parte de un club de jóvenes estudiantes, aficionados a las matemáticas, que contaba entre sus miembros a George Szekeres, Paul Erdős o Paul Turán, que luego serían algunos de los matemáticos más conocidos del siglo XX. A los dos primeros les interesó especialmente la cuestión. Tal y como lo cuentan Szekeres y Erdős en su artículo[1] de 1935, Esther Klein dio una prueba de su observación y planteó el problema en general: ¿cuántos puntos en configuración general harán falta para poder dibujar siempre un polígono convexo de n lados? ¿Será siempre posible si partimos de una cantidad suficientemente grande de puntos?

En el mismo artículo, Szekeres y Erdős conjeturaron que para cada número de lados n, la mínima cantidad de puntos necesarios en configuración general es precisamente $2^{n-2}+1$ [1]. Hoy en día, la conjetura se ha comprobado únicamente hasta $n=6$: en este caso, $2^{6-2}+1=17$ puntos determinan siempre un hexágono convexo. Como prueba de la complejidad del problema, este último resultado fue demostrado tras una búsqueda exhaustiva a ordenador dirigida por el mismo Szekeres y Peters. La prueba fue publicada en un artículo[2] un año después de la muerte del primero en el 2005. De manera similar a la observación original de Klein con $n=4$, consiguieron reducir el problema a una cantidad finita de casos para la configuración de los puntos y se llegó a que 17 eran suficientes para siempre poder construir un hexágono convexo.



Un hexágono convexo contenido en 17 puntos en configuración general.

Por otro lado, los esfuerzos de las matemáticas más clásicas han llegado a resultados generales en n, acercándose a una prueba definitiva de la conjetura. En su artículo original, Szekeres y Erdős probaron que la cantidad de puntos que harían falta no sólo sería siempre una cantidad finita, sino que era como mucho $\binom{2n-4}{n-2}$ un resultado que se obtiene a partir del Teorema de Ramsey[1]. Más tarde, en 1960, lograron demostrar que el $2^{n-2}+1$ de su conjetura es de hecho una cota inferior para el problema[3]. Esto demuestra que, por ejemplo, hay configuraciones de 8 puntos que no permiten dibujar un pentágono convexo ya que $2^{5-2}+1=9>8$.

Con el objetivo de alcanzar la igualdad, desde entonces el punto de foco ha estado en afinar más las cotas superiores. La dificultad se encuentra en que, aunque la teoría de Ramsey proporcione cotas generales, estas son muy alejadas de lo que afirma la conjetura de Erdős y Szekeres. La más precisa que se ha demostrado hasta el momento se publicó en el 2020 y es[4]:

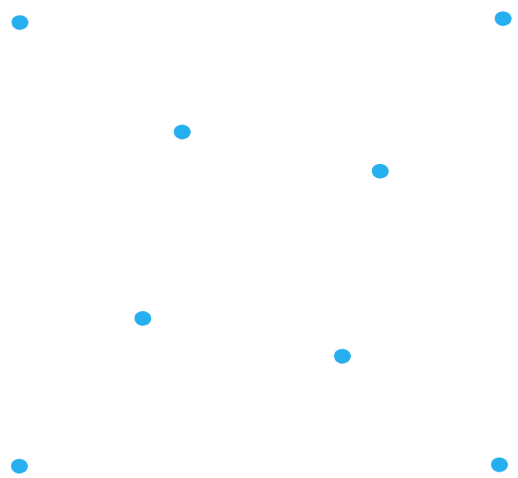
$$2^{n+O(\sqrt{n\log n})}$$

La conclusión insatisfactoria de estos resultados amarga un poco lo que en principio fue conocido como “El problema del final feliz”. Este nombre fue el apodo que le dio Erdős, que estaba convencido que trabajar en ello fue lo que unió a sus dos compañeros Esther Klein y George Szekeres, que se casaron en 1937 y siguieron juntos hasta el fallecimiento de ambos, separados por una hora.

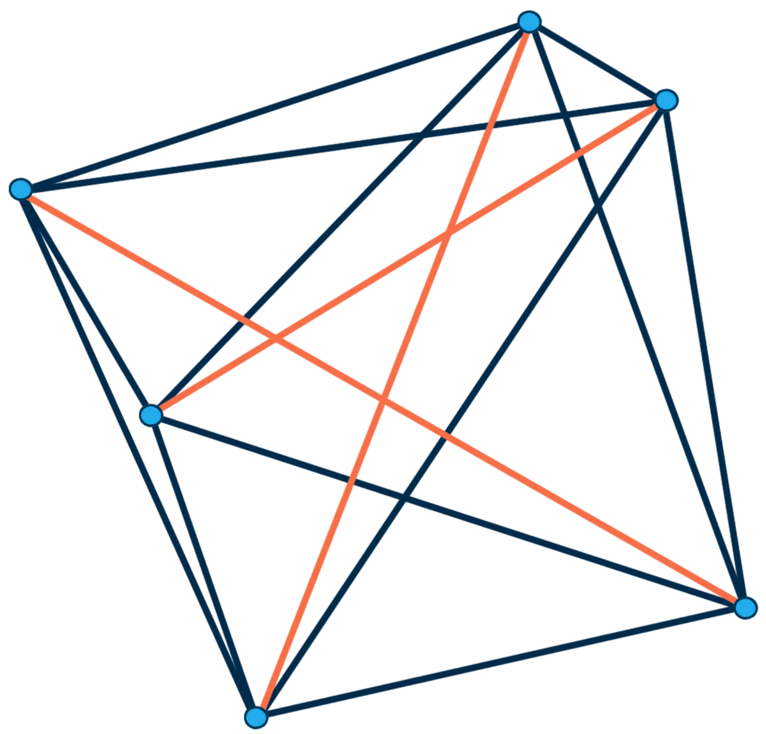
2. Familias intersecadas.

Consideremos un conjunto A de n puntos en el plano que, del mismo modo que en el problema anterior, se encuentran en configuración general. Consideremos que unimos ahora todos los puntos de A a través de segmentos. Llamamos familia intersecada a un subconjunto de estos segmentos tal que todos ellos se cortan entre sí.

El problema de las familias intersecadas (en inglés: *crossing families*) consiste en dar una cota inferior para el tamaño de la familia intersecada más grande entre los segmentos resultantes de unir todos los puntos de un conjunto. Esto es: dado un conjunto de n puntos en configuración general, ¿de qué tamaño debe existir necesariamente una familia intersecada de segmentos uniendo tales puntos? En el siguiente ejemplo, se ha resaltado en rojo la familia intersecada más grande. Como se observa, para este conjunto de seis puntos, la familia es de tamaño tres y, sin embargo, resulta fácil construir conjuntos de igual o mayor cantidad de puntos tales que no hay en ellos familias intersecadas de más de dos segmentos.



8 puntos en configuración general que no contienen un pentagono convexo.



Familia intersecada de tres segmentos.

En 1994, se publica un trabajo[5] en el que colaboraron siete matemáticos, entre los cuales, como adelantábamos, se incluyen Erdős, y también Daniel J. Kleitman, (asesor y cameo en la archiconocida película *El indomable Will Hunting*). En esta publicación llegaron a probar la siguiente proposición: para todo conjunto de *n* puntos en configuración general, existe necesariamente una familia intersecada de al menos $\sqrt{n/12}$ segmentos. Así, podemos asegurar que para un conjunto de 13 puntos existirá una familia intersecada de dos segmentos (esto es, hay segmentos que se cortan), ¡pero no podemos asegurar que existirá una familia intersecada de tres segmentos para conjuntos de 48 puntos! Si no os parece un resultado lo bastante fuerte, es porque no lo es: por algo estamos hablando de un problema abierto. Para llegar a esta conclusión, Erdős y compañía consideraron primero un caso en el que los puntos se distinguen con dos colores y solo pueden unirse puntos de colores diferentes. Con esta restricción lograron probar que existe una familia intersecada de tamaño $\sqrt{n/24}$, e incluso diseñaron un algoritmo relativamente sencillo para construir tal familia. De esta cota deducen después la general sin distinción de colores.

Sin embargo, incluso los propios autores del trabajo tenían fundadas sospechas de que este no era, ni por asomo, el mejor resultado que se podía obtener. Creían que debía existir una cota inferior, incluso lineal (en relación al número de puntos), para la familia intersecada más grande posible. Esta creencia la basaron en que, si generamos conjuntos de puntos aleatorios por ordenador, obtenemos siempre familias intersecadas mayores de lo que la tímida cota de $\sqrt{n/12}$ asegura. ¿El siguiente paso? Se buscan $t > 1/2$ y $C > 0$ (idealmente $t = 1$) para los que pueda asegurarse que: para todo conjunto de puntos en el plano en configuración general, al unir todos ellos por segmentos, existe una familia intersecada de tamaño al menos Cn^t.

¿Os atrevéis a intentarlo?

Referencias

1 B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company (1982), p. 15

2 E. M. STEIN, R. SAKARCHI, *Real Analysis*, Princeton Univerity Press (2005), p. 323-349

3 K. J. FALCONER, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John wiley & Sons (2003), p. 25

4 B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, Ibid, p. 1

5 K. J. FALCONER, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Ibid, p. 222

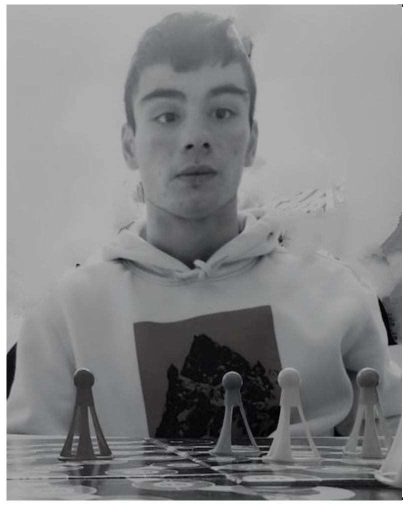
7 K. J. FALCONER, Ibid p. 232

8 SCHMIDKTE, M.Romero, https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor#/media/Archivo:Conjunto_de_Cantor.png, 7 diciembre 2005, Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0)

Entrevista a

Nicolás Atanés

Por Daniel Lozano Sánchez



Hoy tenemos el placer de entrevistar a Nicolás Atanes: un joven intrépido de 17 años que lucha por hacer ver a la gente que las matemáticas desempeñan un papel fundamental en nuestras vidas.

Nico decidió crear Virus Matemático el 2 de febrero de 2020 con el objetivo de promover y defender las matemáticas. Desde entonces se han llevado a cabo diversas iniciativas en distintos puntos de España y, poco a poco, se va viendo cómo este grupo de personas apasionadas por dicha materia va creciendo y conociéndose en todo el mundo.

Buenos días Nico. Estamos encantados de tenerte hoy aquí con nosotros.

¡Saludos QED!

Para empezar, cuéntanos un poco sobre ti y qué es Virus Matemático.

Soy un estudiante de bachillerato que, cansado de ver a la gente poco interesada por las matemáticas, decidí hacerme activista para expandir el interés en estas a la sociedad. De ahí nace la iniciativa de Virus Matemático, para hacer llegar las matemáticas a todas aquellas personas que las ignoran o las creen inútiles.

Sabemos que habéis tenido varias iniciativas en distintos puntos de España, lo pudimos ver en las noticias. ¿Cuáles han sido y en qué consistieron?

Pues el 6 de diciembre de 2020 organizamos la Acción de Diciembre, donde hicimos una presentación virtual que pudo seguirse por YouTube y tuvo bastante repercusión. Me llamaron de Las mañanas de Radio Nacional para que contara qué íbamos a hacer. Más tarde, el 4 de abril de 2021, organizamos MatemAbril en las calles de Pamplona y Sevilla. Adrián Macías fue quien lo hizo en Sevilla y salió en los informativos de Canal Sur.

El 30 de julio organizamos la Acción de Julio, que fueron juegos de matemáticas en varias ciudades: León, Madrid, Valencia, Ourense, A Coruña... En Navarra tuvo bastante repercusión.

La última iniciativa fue el 8 de octubre, con la Acción de Octubre, que organizamos en varias ciudades también.

Nico, ¿nos podrías hacer un pequeño adelanto de cuándo y dónde serán las próximas iniciativas? ¿Qué es lo que tiene Virus Matemático en mente?

Queremos organizar un congreso de divulgación de las matemáticas en abril del 2022, que atraiga a varios matemáticos y personas muy conocidas en el mundo actual. Nos gustaría hacer un hito histórico en la matemática contemporánea y estoy seguro de que lo vamos a conseguir.

Vamos a hablar un poco de cómo están las matemáticas hoy en día. Últimamente se está escuchando cada vez más que las matemáticas "se enseñan mal" y que hay que cambiar el enfoque de la enseñanza. ¿Qué opinas sobre este tema? ¿Crees que tiene alguna relación directa con el alto fracaso escolar que hay en esta materia?

Yo creo que en bachillerato las matemáticas se enseñan de manera muy mecánica. Es típico oír "apréndete esta fórmula de la asíntota" y la gente no sabe ni qué es una asíntota. Habría que razonar, ver cómo se llega a los resultados que nos enseñan, guiar hacia unas matemáticas que gusten, y dejar de mecanizar todo porque de esa manera solamente hacemos más difícil que los jóvenes quieran ser matemáticos. En clase deben enseñar matemáticas como si fueras a hacerlas, la Olimpiada Matemática es buen ejemplo. Tengo varios compañeros en la universidad y está claro que el enfoque de la materia es totalmente distinto. Dicho por ellos mismos (que tienen la comparativa universidad-colegio): "directamente lo que se hace en las escuelas es dar las técnicas necesarias para resolver problemas tipo, por lo que el alumno solo se encarga de aprenderlas y repetirlas en el examen". Pero esto es como aquel proverbio que dice así: "dale un pez a un hombre y comerá hoy, dale una caña y enséñale a pescar y comerá el resto de su vida". En el colegio *se da el pez*, pero no se *enseña a pescar*. Cuando a alguien le das todo hecho sin necesidad de razonar, reflexionar y pensar, pierde el interés que hay detrás de todo ese proceso, se olvida y acaba por no importarle. Las matemáticas no son así, de hecho, son todo lo contrario. Se nota sobre todo en el enfoque de la Selectividad. Cuatro temas distintos con unos cuantos problemas tipo cada uno. Te miras unos pocos exámenes de otros años y ya sabes más o menos lo que vas a tener que hacer en el examen. Pero luego cuando cae algo distinto en lo que hay que razonar o pensar más de la cuenta, entonces surgen quejas y sale en los telediarios. Se escuchan cosas como: "¡este examen ha sido súper difícil!" Normal, si nos tienen acostumbrados a vomitar en el examen y olvidar los conocimientos unos días después, todo lo que implique razonar nos resulta complicado. No sabemos qué son las matemáticas realmente.

Icono de Virus Matemático;
@VirusMatematico en Twitter.

Mucha gente, desde joven, ya presenta cierta animadversión hacia las matemáticas ¿Cómo se podría ayudar a que los jóvenes no sientan tanto rechazo hacia este campo de la ciencia?

Los profesores deberían dejar de exigir a los alumnos hacer las cosas a su manera y los alumnos deben de dejar de tener miedo a equivocarse. Que bastante se equivocan pensando que las matemáticas son números. Luego el que menos sabe es el más popular, y eso seguro que no pasa si no sabes sobre otros ámbitos que son más conocidos entre la gente de mi edad, como quién es Ibai Llanos. Es un problema realmente serio. Si sales a la calle y preguntas a jóvenes que si les gustan las matemáticas o si las entienden siquiera, te llevas una gran sorpresa y no precisamente agradable.

Es claro que hay un problema y el que no lo reconozca es porque está mirando a otro lado.

¿Cómo ves, por ejemplo, que en un bar a un grupo de amigos le haga gracia que uno de ellos no sepa resolver una ecuación de segundo grado, pero si alguien dice que no sabe quién escribió el Quijote o quién fue Cristobal Colón le miran mal? Con esto quiero decir: ¿crees que las matemáticas no ocupan el espacio cultural que se merecen?

Es cierto, y me entristece muchísimo. Es uno de mis objetivos, que los Congresos Internacionales de Matemáticos sean un evento más popular. Seguro que el Mundial de 2022 sale en todos los periódicos, pero el Congreso de 2022 con suerte sale en EL PAÍS… Hay mucho trabajo por hacer todavía con respecto a este tema. Creo que sería más fácil si hiciéramos ver a la gente que las matemáticas están realmente detrás de casi todo, por no decir todo.

Has tenido otras entrevistas con medios importantes. ¿Crees que a raíz de estas entrevistas e intervenciones se podría difundir la palabra de Virus Matemático de una manera general? ¿Se podrían conseguir grandes cambios en la forma de ver las matemáticas?

Mi objetivo está lejos de cumplirse, pero se cumplirá. Pido seriedad en este asunto. Las matemáticas no se pueden enseñar así de mal, ni la sociedad debería verlas como *numeritos*… Los medios nos ayudan a dar difusión a lo que hacemos, a animar a la gente a salir a pedir ayuda ante esta situación.

Nico, un resumen de qué son para ti las matemáticas y por qué deberíamos difundirlas y enseñarlas como se merecen.

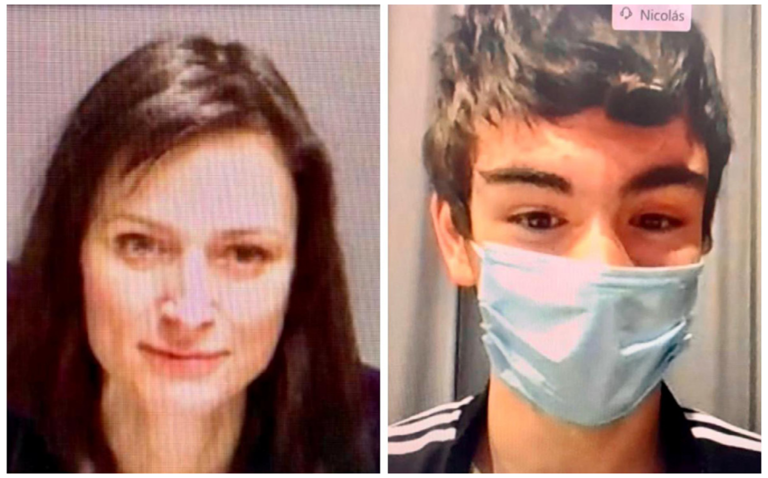
Hay que difundirlas porque son más importantes de lo que parece. Si no enseñamos las matemáticas como se merecen, podríamos estar en otra crisis matemática por falta de nuevos matemáticos, e incluso que desaparezcan tal y como se conocen hoy en día en el ámbito universitario. La sociedad tiene que cambiar la forma de verlas urgentemente si queremos que esto no ocurra. Si el fútbol se ha vuelto importante en un siglo, y nos hemos vuelto relativamente conscientes del cambio climático en tres años, ¿por qué haría falta mucho más tiempo para las matemáticas?

Muchas gracias, Nico, por haber estado aquí con nosotros. Ha sido un placer y esperamos que Virus Matemático siga creciendo tanto como lo ha hecho hasta ahora.

¡Muchas gracias a vosotros! Ojalá dé resultados y la gente vea las matemáticas de forma diferente. Somos el Nicolas Bourbaki del siglo XXI.

Captura de pantalla del vídeo de nominación de Nicolás en los VI Premios Navarra Televisión en la categoría Valores jóvenes.

Marcos Aláiz, coordinador de León, en las Leónjoven Youth Talks del Ayuntamiento de León.



Videollamada con Mariya Gabriel, Comisaria europea de Educación.

Soluciones en las páginas 64-66

TRAGEDIA EN LA GEODESIA

Adaptado por Samuel Nevado Rodrigo

Dos profesores de geometría se encuentran perdidos tras una larga etapa de senderismo. Cansados, reposan en un sitio que les resulta familiar, y pregunta uno:

- Pablo, ¿sabes dónde estamos?

- No sé, Josechu, pero me he dado cuenta de lo siguiente: nos hemos encaminado un kilómetro hacia el sur, otro al oeste y, por último, hemos recorrido un kilómetro dirigiéndonos al norte, todo para volver a acabar en el mismo sitio. No alcanzo a comprenderlo.

Habiendo escuchado a su compañero de aventuras, Josechu sonríe:

- Ya sé dónde estamos, Pablo.

¿Dónde se pueden encontrar Pablo y Josechu?

SIGNO Y SENO

Por Javier Aguilera Villegas

Os reto a resolver la siguiente integral: $I = \int_0^\infty \operatorname{sgn}(\sin(e^x))\,dx$

Donde *sgn* es la función signo:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x > 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

LA BELLEZA OCULTA EN DECORAR CARTAS

Por Pablo Sánchez Peralta

Ana tiene la costumbre de pintar las esquinas de las cartas que escribe. Siempre utiliza 4 colores distintos: rojo, amarillo, verde y azul. Para empezar, ordena las pinturas de izquierda a derecha, y según su posición las relaciona con una esquina (como en la imagen). Además, tiene la manía de que el rojo y el amarillo van en esquinas opuestas, es decir, colorean los extremos de la diagonal imaginaria que atraviesa la carta. Le gusta variar la forma en la que decora su correspondencia, y por ello siempre trata de usar todas las configuraciones posibles hasta volver a repetir alguna.

Sin embargo, hay una dificultad añadida, Ana es ciega. Esto es un problema para ella porque pasa tanto tiempo entre una carta y otra que ya no se acuerda de dónde está cada color (solamente está segura de que entre el rojo y el amarillo se encuentra otro color), y no quiere repetir unas decoraciones más que otras.

Todo esto ha llevado a Ana a pensar en seguir una **regla de oro** para cambiar los colores de las esquinas, esto es, hacer siempre el mismo movimiento de las pinturas ordenadas de izquierda a derecha, una y otra vez, con el objetivo de recorrer todos los posibles diseños una sola vez hasta llegar al inicial. Un movimiento puede consistir en varios intercambios, por ejemplo, primero desplazarlos una posición hacia la derecha (salvo el extremo derecho que pasaría a ser el extremo izquierdo) y luego intercambiar 2 pinturas (de posiciones válidas), se considera como un solo movimiento. La única restricción es que una vez elegido dicho movimiento ya no puedes cambiar de opción, solamente repetirlo una y otra vez.

¿Qué puedes decirle a Ana sobre la regla que busca?

¿TE HAS FIJADO?

Las páginas de esta revista
esconden un patrón determinado.
Sin ánimo de dar la pista,
¿eres capaz de seguir el enumerado?

Si no logras dar con la respuesta,
mándanos un correo a qed.asociacion.ciencias@uam.es, *o contáctanos vía*
Instagram (usuario: qed.uam*) o Twitter (usuario:* qed_uam*)*

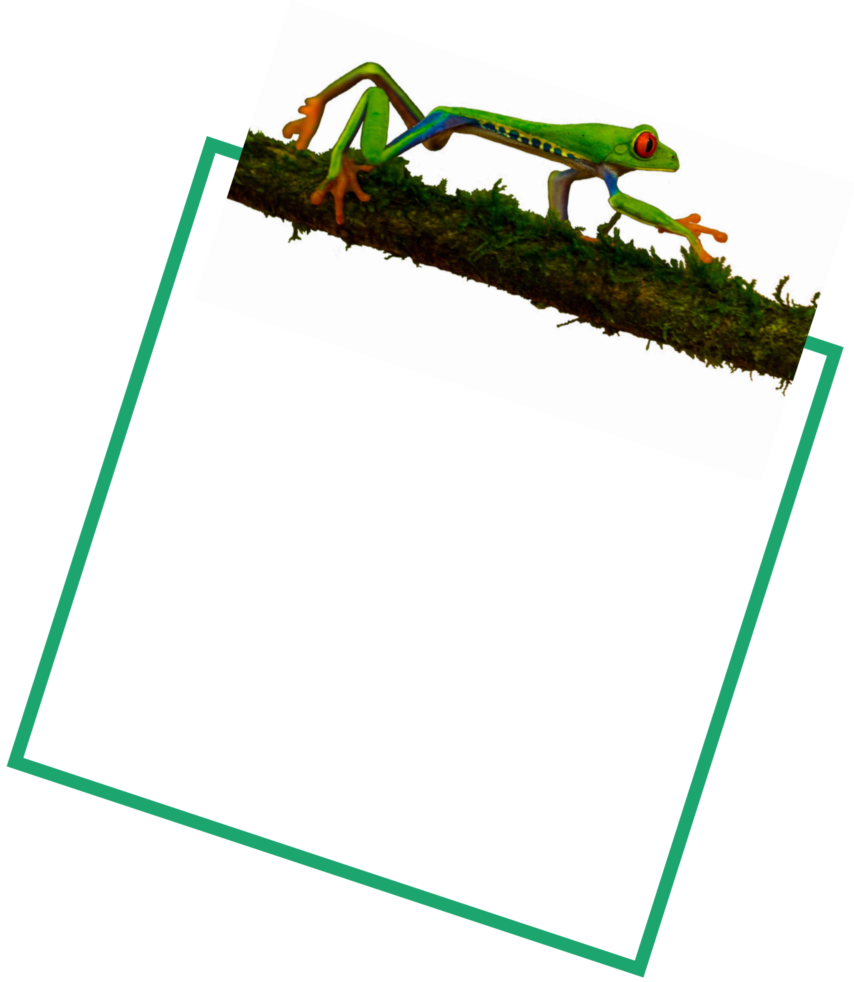
¿Te atreves con las Olimpiadas?

Soluciones en la siguiente página

LA RANA SALTARINA

Olimpiada Iberoamericana Universitaria de 2019, adaptado por Pablo Soto Martín.

Una rana se encuentra en un vértice de un cubo. Al cabo de un minuto, la rana salta a uno de los vértices contiguos a los que está con la misma probabilidad. Si la rana empieza en el vértice A, ¿cuál es la probabilidad de que la rana vuelva al vértice A tras n minutos?



CONJUNTOS AUTÓNOMOS

Olimpiada Matemática internacional de Bulgaria de 2019, adaptado por Mateo Rodríguez Polo.

Decimos que un conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ es *autónomo* si está totalmente ordenado por la inclusión. Esto es, si $\mathcal{F} \subset P(\mathbb{N})$ es tal que para cada par de conjuntos A y B en $\mathcal{F}$, se tiene que o bien $A \subset B$ o bien $B \subset A$ ¿Existe un conjunto autónomo con cardinal no numerable?

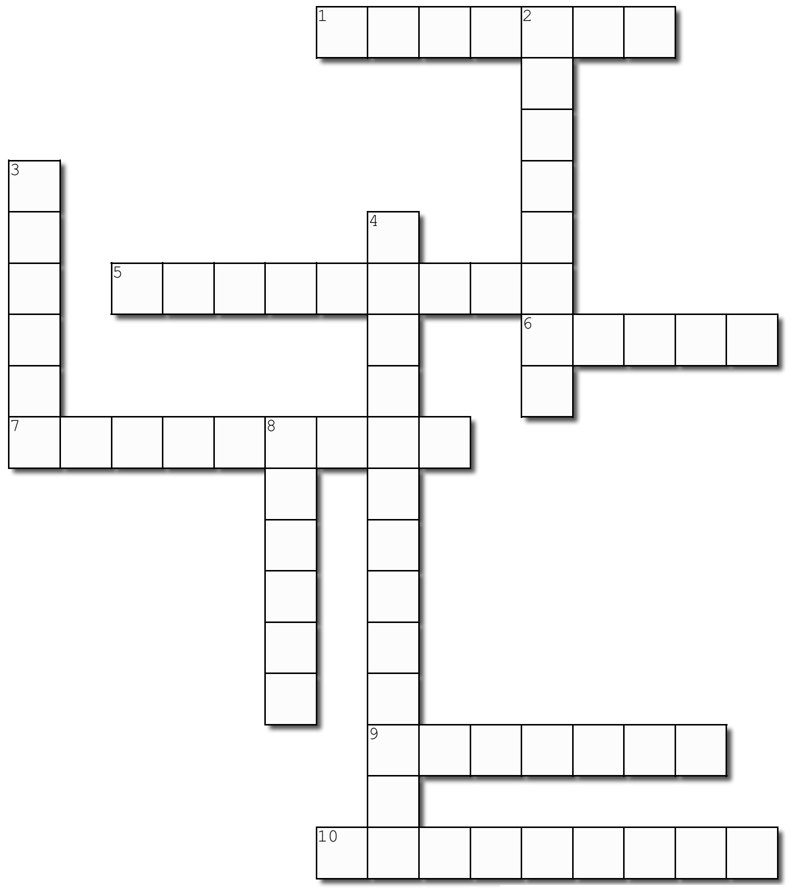
Cruciγ

Horizontal

1. Matemático alemán, el que se integra muy bien entre amigos.
5. Rama de las matemáticas que no es Topografía.
6. ¿Qué me dices, que sirve para medir distancias? Normal.
7. Cardinal de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
9. Lo son x^3, $\sin(x)$ y 37.
10. Demostración que comienza tirando la primera ficha del dominó.

Vertical

2. Donde la operación es independiente del orden de los argumentos.
3. Premisa que se asume.
4. Te contradigo en que éste es el método de demostración más elegante.
8. Una de las trigonométricas.



Soluciones a los problemas de Olimpiada y los acertijos

LA RANA SALTARINA

Decimos que un vértice está a d saltos de otro vértice, si se necesitan d saltos de rana para llegar de un vértice a otro. Así, podemos dividir los vértices en grupos en función de como estén de alejados del vértice A. Así, un elemento que esté a distancia d, se podrá mover de un salto a uno que está a distancia $d-1$ o $d+1$. El diagrama de transción queda como en **1**.

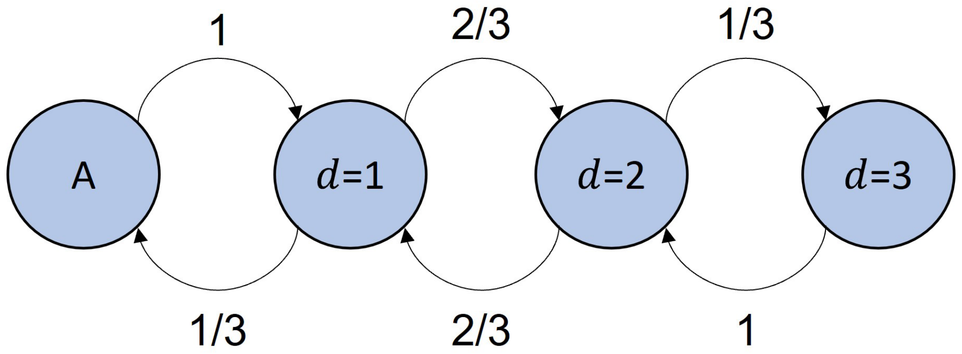
Podemos observar con esto que no se puede volver a A con un número impar de movimientos. Si n es par, el nuevo diagrama de transición queda como en **2**.

El caso base es $f(0)=1$ (la probabilidad de volver a A tras 0 movimientos es 1).

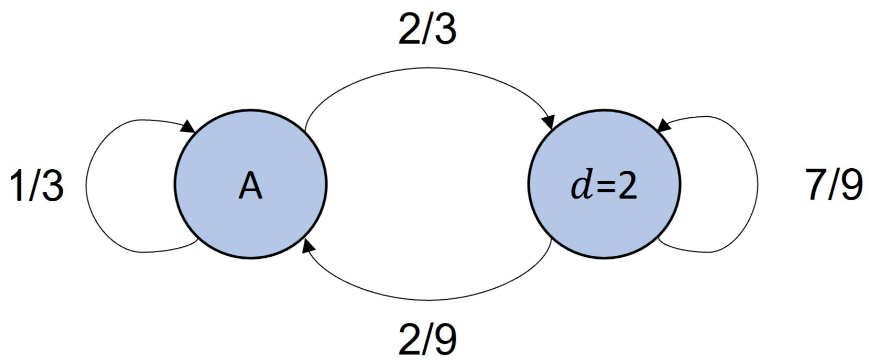
Si desarrollamos esta recurrencia, podemos ver por inducción que

$$f(m)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}f(m-1)=$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}f(m-2)=$$
$$=\ldots=\sum_{i=1}^{m}\frac{2}{9^i}+\frac{1}{9^i}f(0)=$$
$$=\frac{9^m-1}{4\cdot 9^m}+\frac{1}{9^m}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4\cdot 3^{2m}}$$

En resumen, la probabilidad de que la rana vuelva al vértice A tras n minutos es 0 si n es impar, y $\frac{1}{4}+\frac{3}{4\cdot 3^n}$ si n es par.



▲ **Figura 1.**



▲ **Figura 2.**

Soluciones a los problemas de Olimpiada y los acertijos

CONJUNTOS AUTÓNOMOS

Sí, existen conjuntos *autónomos* no numerables. Sea $\phi:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{N}$ una biyección. Si encontramos un conjunto $\mathcal{G}$ no numerable de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ ordenado por inclusión, tendremos que $\phi(\mathcal{G})$ será autónomo y no numerable, pues una biyección preserva la inclusión y el cardinal (por definición).

Para cada $x\in\mathbb{R}$, considérese el siguiente conjunto: $G_x=\{q\in\mathbb{Q}:q<x\}=(-\infty,x)\cap\mathbb{Q}$.

Es trivial comprobar que $\mathcal{G}:=\{G_x:x\in\mathbb{R}\}$ está ordenado totalmente por inclusión, y además es no numerable, pues por ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, $G_x\neq G_y$ si $x\neq y$. Por tanto, el conjunto $\phi(\mathcal{G})$ es autónomo y no numerable.

Como desafío adicional, ¿qué aspecto tiene un conjunto autónomo no numerable como subconjunto de $P(\mathbb{N})$?

SOLUCIÓN AL CRUCIGAMMA

Horizontal

1. Riemann
5. Topología
6. Norma
7. Alephcero
9. Impar
10. Inducción

Vertical

2. Abeliano
3. Axioma
4. Contradicción
8. Coseno

LA BELLEZA OCULTA EN DECORAR CARTAS

Para poder responder a esta pregunta hay que conocer qué tipo de movimientos podemos hacer. Por ello empezamos por ver que hay 8 combinaciones de colores posibles según las reglas de Ana. Son 8 ya que para la esquina superior izquierda nos vale cualquier pintura que elijamos, esto es hay 4 opciones, y luego para la siguiente posición solo quedan 2 posibilidades (recuerda que Ana siempre intercala los colores rojo y amarillo).

Ahora que conocemos todas las posiciones, está claro que rotar todos los colores una posición a la derecha (salvo el extremo derecho que pasaría a ser el extremo izquierdo), es un movimiento que lleva decoraciones válidas en otras combinaciones que también usa Ana. Este movimiento lo vamos a denotar por (1234), que abrevia la acción de llevar la pintura de la posición 1 a la 2, la de la 2 a la 3, la de la 3 a la 4 y la de la 4 a la 1. También hay otros distintos, por ejemplo intercambiar las pinturas de las posiciones 1 y 3, que con la notación anterior se escribe (13). Si partimos de la decoración inicial (la que está en el dibujo), se puede comprobar que si uno aplica estos movimientos o combinaciones de ellos, podemos llegar a cualquiera de las otras 7 configuraciones. Esto quiere decir que cualquier regla que busquemos va a ser una combinación de estos movimientos.

Supongamos entonces que existe la regla que Ana busca. Puesto que este movimiento recorre todos los posibles diseños una sola vez hasta llegar al inicial, (1234) y (13) deben ser el resultado de aplicar varias veces seguidas la regla de oro. Por otra parte, como solamente hay 8 decoraciones posibles, nuestra regla aplicada 8 veces seguidas es lo mismo que no hacer nada. Para (1234) esto pasa si lo hacemos 4 veces, y para (13) basta con 2 iteraciones. A este número lo vamos a llamar orden de un movimiento. Ahora bien, si usamos el giro a derecha (1234) dos veces seguidas, acabamos con una configuración equivalente a hacer el movimiento de orden 2 dado por (13)(24) (esto es intercambiar los colores de las diagonales). Los movimientos (13) y (13)(24) son distintos, pero nuestra regla de oro nos dice que solo hay un movimiento de orden 2, que es el resultante de aplicar la regla 4 veces seguidas. Entonces, ¿qué está pasando aquí? Pues simplemente, que no existe esa tal regla de oro que Ana busca (este argumento se basa en una propiedad general de los llamados grupos cíclicos).

Pero, ¿acaso nos vamos a conformar con un simple no? Esto son matemáticas, y podemos darle una regla de plata a Ana. Esto es, quizás no puedas aplicar siempre el mismo movimiento, pero puedes recorrer todas las posiciones aplicando primero un movimiento y luego otro, y así sucesivamente. De modo que buscamos dos movimientos que como resultado final den otro de orden 4 (observa que cada vez que se aplican esos dos movimientos se recorren 2 posiciones distintas). Así que si tomamos (1234) como elemento de orden 4, podemos entonces elegir como primer movimiento nuestro conocido (13) y como segundo (12)(34), que cambia los colores de una vertical de la carta a otra. Por supuesto, hay más de una regla de plata (de hecho hay tantas como 8, pero para esto quizás ayuda a darse cuenta de que todos estos movimientos forman lo que se llama un grupo diédrico de orden 8).

Soluciones a los problemas de Olimpiada y los acertijos

SIGNO Y SENO

Lo primero de todo es darse cuenta de que :

$$C = \{\delta \in \mathbb{R}^{+}: \sin(e^{\delta}) = 0\} = \{\log(n\pi): n \in \mathbb{N}\}$$

Sabiendo esto, podemos poner la integral como una suma de integrales sobre los intervalos donde nuestra función vale enteramente 1 o -1 .

Por ejemplo:

$$I_1 = \int_0^{\log(\pi)} sgn(\sin(e^{x}))\,dx = \int_0^{\log(\pi)} dx\,;$$

$$I_2 = \int_{\log(\pi)}^{\log(2\pi)} sgn(\sin(e^{x}))\,dx = -\int_{\log(\pi)}^{\log(2\pi)} dx$$

Por tanto

$$I = \int_0^{\log(\pi)} sgn(\sin(e^{x}))\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\log(k\pi)}^{\log((k+1)\pi)} sgn(\sin(e^{x}))\,dx =$$

$$\int_0^{\log(\pi)} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\log(k\pi)}^{\log((k+1)\pi)} (-1)^{k}\,dx =$$

$$\log(\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} (\log((k+1)\pi) - \log(k\pi)) =$$

$$\log(\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) =$$

$$\log(\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{(-1)^k}\right) =$$

$$\log(\pi) + \log\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{(-1)^k}\right).$$

Sea $P = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{(-1)^k}$.

Dividimos P en dos productos, uno con las k pares y otro con las impares:

$$P = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1} =$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k+1)}{(2k)}\frac{(2k-1)}{(2k)}\right) =$$

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k)}{(2k+1)}\frac{(2k)}{(2k-1)}\right)\right)^{-1}$$

que es el inverso del producto de Wallis. Si W denota este producto, entonces sabemos que

$$W = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = W^{-1} = \frac{2}{\pi}.$$

Como

$$I = \log(\pi) + \log(P) \Rightarrow$$

$$I = \log(\pi) + \log\left(\frac{2}{\pi}\right) = \log(2)$$

En conclusión:

$$\int_0^{\infty} sgn(\sin(e^{x}))\,dx = \log(2)$$

TRAGEDIA EN LA GEODESIA

Pablo y Josechu podrían estar en el Polo Norte, pero también un kilómetro al norte de un paralelo que mida 1 kilómetro en longitud (muy cerca del Polo Sur). O uno con una longitud de medio kilómetro, un tercio de kilómetro, un cuarto... La realidad es que hay infinitos puntos donde podrían encontrarse. Te invitamos a ver este vídeo para entender el acertijo y el conjunto de sus soluciones en su totalidad:

https://www.youtube.com/watch?v=OOzz-ncDp2oE

Reseña literaria

El tío Petros y la conjetura de Goldbach

Por Nicolás Rey

“Las matemáticas son como un árbol con raíces firmes (los axiomas), un tronco fuerte (la demostración rigurosa), y ramas que crecen constantemente y dan flores maravillosas (los teoremas)”.

El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach (pág. 81).

Prepare su pensamiento. Le invito a recordar a una persona que está en su familia, a la que no conoce como le gustaría y que está presente en las conversaciones con familiares cercanos (generalmente mayores que usted), siempre rodeada de un aura de misterioso pasado y molesto presente o futuro. Es esa tía, ese primo lejano o ese abuelo raro del que hablan lo justo y nunca para cosas buenas. Sin embargo, a usted no le infunde rechazo, sino una curiosidad inocente.

Este es el caso del protagonista de El tío Petros y la conjetura de Goldbach, escrita en griego por Apostolos Doxiadis en 1992, reescrita por él mismo en inglés en 1998 y traducida al español en el 2000 por Ediciones B. El joven protagonista, cuyo nombre no se revela, ve desde pequeño a su tío paterno Petros Papachristos a través de los ojos prejuiciosos de su padre y su otro tío. Los comentarios de su padre, que es un dramático, no logran aleccionar al sobrino de Petros, que va desarrollando una curiosidad casi obsesiva por su tío. El chico va recibiendo algunas respuestas: primero aprende que su tío es aficionado al ajedrez y a las matemáticas (dos disciplinas a menudo emparejadas); poco después, que fue catedrático en la universidad de Múnich. En este punto, el joven mejora considerablemente su rendimiento escolar en cálculo y álgebra a la par que se obsesiona más y más por su tío. Por fin, su padre le cuenta parte de la historia de Petros Papachristos. Nació en Atenas en 1895, y desde la infancia mostró un talento precoz para las matemáticas. No habiendo terminado la secundaria, su padre, el abuelo del chico, le mandó a Alemania a estudiar la carrera de Matemáticas. Con veinticuatro años, se convirtió en el profesor titular más joven de la universidad de Múnich, y terminó por regresar a Grecia en 1940 a causa de la II Guerra Mundial. La vida del tío Petros, exitosa a ojos del protagonista, no lo es tanto para su padre: el profesor Papachristos "cometió el peor de los pecados" malgastando su don en la conjetura de Goldbach.

"—¿Qué? —preguntó el chico.

—Bah, un acertijo absurdo, algo que no le interesa a nadie salvo a un puñado de ociosos aficionados a los juegos intelectuales.

—¿Un acertijo? ¿Como los crucigramas?

—No, un problema matemático, pero no cualquier problema..."

Y al padre no le falta razón. Al principio, la conjetura de Goldbach se presenta como un problemilla, algo para pasar el rato. Su enunciado es este:

DEMUESTRA QUE TODO NÚMERO PAR MAYOR QUE 2 SE PUEDE ESCRIBIR COMO LA SUMA DE DOS NÚMEROS PRIMOS.

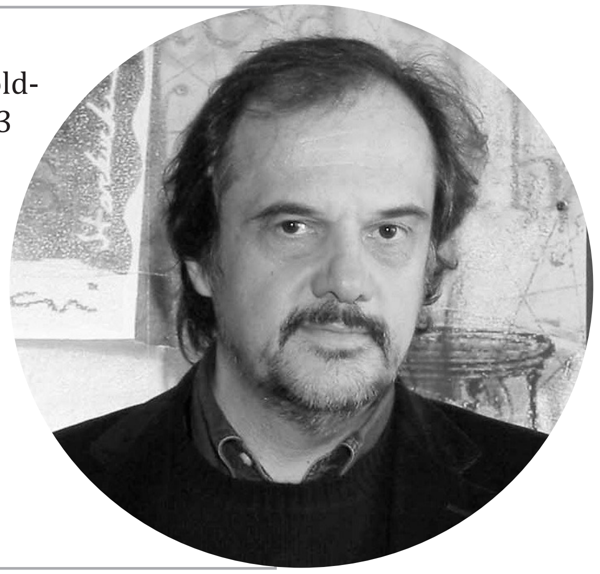
¿Sencillo? Ojalá se lo parezca, querido lector, y lo resuelva. Le colmarían la fama y satisfacción de haber resuelto uno de los problemas más tortuosos y elegantes que están sin resolver en la matemática actual (desde que Christian Goldbach se lo propusiera por carta a Leonhard Euler en 1742). Se han hecho numerosos avances en la conjetura, y se ha demostrado el resultado para los números pares de hasta 17 cifras. Vuelvo a nuestro joven griego. Tras la historia de su padre (no completamente cierta), el joven se interesa aún más por su tío. Al acabar su penúltimo curso de bachillerato, acude a la casa de éste para contarle que él también quiere estudiar Matemáticas. Este es el primer contacto poderoso entre tío y sobrino. Petros le confirma que él no pudo resolver la conjetura. Le propone un acertijo para las vacaciones de verano, con el propósito de evaluar sus aptitudes en la ciencia pura. "El problema será difícil. No cualquiera puede resolverlo, pero si tienes dotes para ser un gran matemático, lo conseguirás", le indica Petros. "Quiero que intentes demostrar que

TODO NÚMERO PAR MAYOR QUE 2 ES LA SUMA DE DOS PRIMOS".

El joven sobrino, que ignora el célebre enunciado, lo intenta y fracasa, y su tío le fuerza a jurar que va a abandonar cualquier relación con las matemáticas.

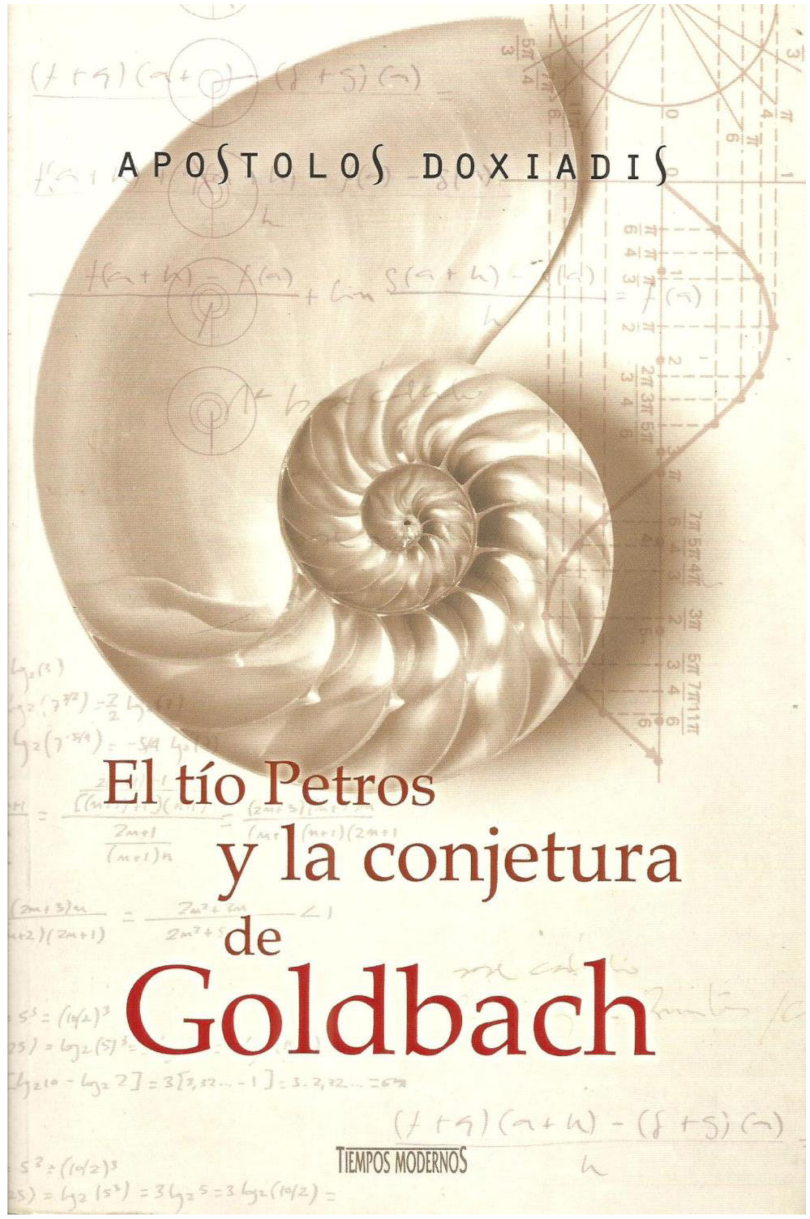
A partir de aquí, el joven experimenta diferentes fases en la percepción de su tío, así como yo mismo las pasé leyendo el libro y como el lector las puede experimentar. Es una novela corta, de diferente extensión según la edición (160-200 páginas), muy fácil de leer y con un tono tranquilo y relativamente amable. (Para los miembros de la comunidad universitaria de la UAM, se encuentra en la biblioteca de la facultad de Formación de Profesorado y Educación). En la parte central de la obra, el tío Petros expone la historia de su vida ante el protagonista, que acabará siendo su "sobrino favorito". El recorrido del protagonista, desde las primeras impresiones hasta su última visión del tío Petros, es muy humano. El lector no necesita conocer la matemática para entender el libro; las notas al pie escritas por el propio sobrino son deliciosas y ayudan a enmarcar los avances suyos y de su tío. Además, tanto el protagonista como su tío se encontrarán (en la ficción, al menos) con algunos de los principales matemáticos del siglo XX, como Hardy, Littlewood, Ramanujan o Gödel.

El autor de El tío Petros y la conjetura de Goldbach, **Apostolos Doxiadis**, nació en1953 en Brisbane, Australia, y es griego. Es escritor de novelas didácticas sobre las matemáticas. La última y también recomendable es Logicomix (en español: Editorial Sins Entido, 2011), una novela gráfica en la que Doxiadis relata el cambio profundo en los fundamentos de las matemáticas entre el siglo XIX y principios del XX.



Encuentro notable la narración de un tópico que se suele asociar a los matemáticos: la obsesión. Es un tema recurrente en la obra, tanto la del tío Petros por la conjetura de Goldbach como la del sobrino por el tío. La fijación enfermiza de algunas personas por las matemáticas no es un asunto menor. Reconozco que no tengo amistad con ningún profesor o investigador matemático, pero es un hecho (y en la obra se refleja) que la mente de algunas personas que se dedicaron a esta disciplina acabó nublada, incoherente, perdida. La concentración, la abstracción, la agilidad de las ideas son herramientas necesarias para un matemático, sí, pero no deberían ponerse por encima de la propia salud. Este libro puede servir de introducción a esta situación a quien no la conozca, y de objeto de reflexión. ¿Por qué razón trabajan los matemáticos? ¿Qué les motiva? Rara vez es por la mera búsqueda de la bella verdad que encierran las matemáticas. A veces es el amor, o el desamor, o la fama, o las expectativas familiares.

A veces es por inercia de lo que se hizo bien en el instituto, o porque es un campo quepromete buenos ingresos. El lector puede pensar sobre estos temas al leer la novela, o no hacerlo, pues también está escrita con un tono cómico muy disfrutable. Mirecomendación, por supuesto, cualquiera que sea su intención, es que se lo lean.



Biografía a lo Hamilton:

Pitágoras

Por Pablo García Fernández

¿Cómo pudo un griego de Samos;
matemático, filósofo, político con liderazgo;
creador de una escuela que duró casi 200 años,
fundada en Crotona, con un afán internacional claro;
llegar a ser nuestro representante más afamado?

Con sus pitagóricos estableció una hermandad,
asentada en Crotona, su querida ciudad.
Buscó con sus propios medios darle capitalidad
de un imperio de política y moralidad.

Una filosofía nueva y radical
donde el número era lo primordial.
También había un secretismo exagerado
que se terminó rompiendo por todos lados.

Con su escuela fundó una *universidad*:
todos trabajan en un objetivo comunal.
No debía haber egos ni fama vulgar,
el trabajo propio es de la hermandad.

Un lugar de conocimiento
no discrimino, acepto todos los sexos,
orígenes, potencial enriquecimiento…
lo único que importa es tu comportamiento.

Producción matemática espectacular,
el teorema más popular.
¿Raíz de 2 es irracional?
Eso destruye mi filosofía sensacional.

Después del ataque del 508
a mi querida Crotona,
algunos dicen que mi moral bajó un tocho,
pero mi teorema sigue siendo la joya de la corona.

—Dinos cómo se llama, dínoslo ya.
—Eso, aún me pregunto cómo se llamará.
—Por su nombre le conocerás.
—Yo soy… Pitágoras.

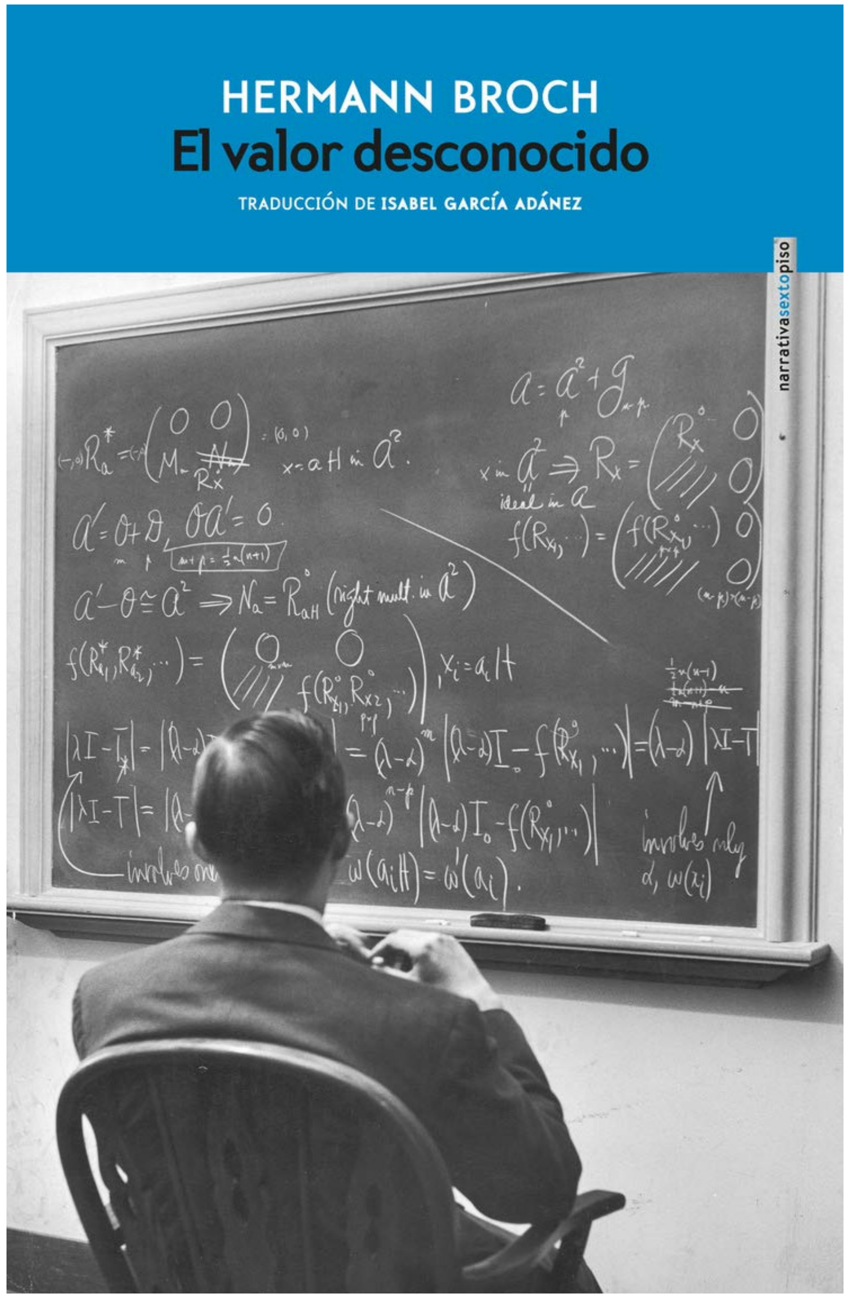
Reseña literaria

El valor desconocido

De Hermann Broch

Texto e ilustración de Lucía Yubero Fernández

“De lo que se trata es de la realidad”, de la necesidad de atrapar una porción de ese exterior grande, lejano e inefable. Tres miradas divergentes descomponen ese entramado de relaciones: la de Richard, la de Susanne y la de Otto Hieck. Los hermanos arrastran la sombra de un padre nebuloso, casi ilusorio y profundamente equívoco. Reelaborando la herencia paterna que late en sus respectivos interiores, ansían un pedazo diferente de realidad. Es imprescindible abandonar la atmósfera de incertidumbre inasible, de terror palpitante, que continúa impregnando su hogar a pesar de la muerte del padre. Son personajes *envueltos*, cuyos cuerpos están rodeados de una cubierta con poca elasticidad. La rigidez es condición de posibilidad de la ruptura del envoltorio de la existencia. Cuando esto suceda, el verdadero yo saldrá a la luz, y, con ello, el “valor desconocido” de la vida. Como proclamaba el padre, “el mundo arde en nuestro interior, no fuera de nosotros”. La claridad se forma en la oscuridad del lenguaje, en aquello que a Richard, a Susanne y a Otto les resulta demasiado difícil de expresar, pero que se intuye continuamente. Así, la realidad del mundo se palpa en un lenguaje medio ordenado que, simultáneamente, encierra y desconoce lo esencial.



El valor desconocido recoge la búsqueda (de la “verdad transformada en conocimiento”) del futuro doctor en matemáticas Richard Hieck. La huida de la noche del padre constituye el *envoltorio* de Richard: lo equívoco es angustioso e indecente. De este modo, las matemáticas se configuran como refugio para él por su limpieza y su maravillosa univocidad. Pero, pese a constituir una red de realidad inmensa y resplandeciente, desenmarañar su entramado no es suficiente. Richard sabe que su meta no se encuentra en las matemáticas (ni siquiera en la lógica), sino que su búsqueda remite a algo externo: “en la más profunda profundidad aparece, soleado, el mundo”. Las matemáticas son insuficientes, un elemento medial entre él y el exterior. Broch, en la época de publicación de *El valor desconocido* (1933), consideraba la ciencia fundamentalmente insuficiente porque nunca alcanza un carácter absoluto, de totalidad universal, que es “lo que interesa” y que el arte, por su parte, sí logra[4].

Los hermanos Hieck representan la “anarquía de valores”, la desintegración del mundo que, según Broch, resultó de la secularización de Occidente[5]. Cada uno se mueve en un sistema de valores cerrado, coherente y antagonista de los ajenos, en tanto que reclama un valor absoluto. Corresponden a los tres lados de un “triángulo del conocimiento”: arte, religión y ciencia (matemáticas).

Así, para tener la realidad en las manos, Otto recurre al arte (a la experiencia de “lo sublime”), simultáneamente urgente y cognoscitivamente mudo. El mundo de Otto es de dimensiones humanas: sus deseos y alegrías quedan dentro de lo alcanzable. Su delgadez contrasta con las pesadas cabezas y cuerpos de sus dos hermanos mayores. El arte no posee la fuerza coercitiva ni de la ciencia ni de la religión, de modo que Otto se mueve en una esfera de *ligereza* vital. No obstante, su personaje está desgarrado: su alma es la del pintor frustrado. ¿Es Otto el que detiene vida, el que tiene mayor conocimiento? Quizá sí, porque todo lo absoluto está relacionado con la mundanidad (lo propiamente matemático es ajeno a las matemáticas)[6] y todo conocimiento verdadero se dirige hacia la muerte[7].

Por su parte, Susanne se aferra a la religión, constituyendo un mythos, un universo ordenado y holístico en medio de la “anarquía de valores”. Su personaje encarna una paz y seguridad inmensas; la religión tiene un carácter incontrovertible, de forma que en el sistema de Susanne todo obedece a una ley estable. Es un mundo de absoluta objetividad, con una causalidad indiscutible y una concepción de lo espiritual y lo simbólico como algo concreto. Susanne representa la huida de lo pecaminoso del mundo, es decir, de lo impredecible (el amor, la muerte, etc.). Por esto, ejerce un particular influjo sobre Richard, está permanentemente en su pensamiento y se configura como elemento de su *envoltorio*.

La experiencia de una muerte real (en contraposición con la muerte ilusoria del padre) libera a Richard de la *pesadilla*. Se trata de una experiencia absolutamente empírica, completamente derivada del mundo. Por primera vez, Richard tendrá contacto con la realidad metafísica como tal: vislumbra que se trata del conocimiento o, equivalentemente, del amor. Del rostro de Ilse Nydhalm:

Pienso tu rostro
en mi último ataúd
debe acompañarme tu semblante[8]

Tiene lugar un proceso de expansión del yo. Esto equivale al establecimiento de una armonía entre el mundo que lleva dentro dentro de sí el sujeto de cognición (mundo interior) : “el mundo arde en nuestro interior y no fuera de nosotros”. En realidad, lo empírico “nunca surge de la experiencia real sino siempre a partir del ámbito del yo, del corazón, de la mente”[9]. ¿Adónde voy?, se pregunta Richard incesantemente. “Y sin respuesta esclarecida, lo humano permanece”[10]. La armonización es la supresión del deseo de escisión de lo animal y del conocimiento, el abandono de la Scientia como Novia Celestial.

A lo largo de *El valor desconocido*, en forma de conversaciones y afirmaciones casi inocentes, Broch esboza su teoría del conocimiento. En un diálogo con el profesor Kapperbrunn, Richard afirma: “una vez que hayamos desarrollado la lógica matemática de la manera adecuada, tendremos la realidad en nuestras manos”. Se trata de la comprensión de lo imprevisible a través de lo previsible. Broch busca una “profecía lógica” que anticipe la acción humana y las *inspiraciones* a partir de todas las experiencias individuales (potencialidades humanas) y de datos empíricos. Es decir, una teoría de la experiencia omnipresente con una necesidad evidente, axiomática y tautológica. De esta forma, se podría “conocer todo”. Con dicho conocimiento, el sujeto alcanzaría un estado de *simultaneidad*: el conocimiento del todo abole lo sucesivo, esto es, el tiempo y la muerte. Se establece una especie de inmortalidad interior: el mundo es víctima de la muerte y el yo sobrevive[11].

HERMANN BROCH

(Viena,1886 - New Haven,1951)

Novelista, ensayista y poeta austríaco de origen judío atravesado por el desastre moral y político de la primera mitad del s.XX.

Junto con escritores como **Joyce, Kafka y Proust**, se considera uno de los grandes revolucionarios de la novela.

En *El valor desconocido* también está presente el carácter absoluto de la demanda ética para Broch[12]. La "misión" es un imperativo ético: atender la demanda de ayuda. No podemos olvidarnos de nuestra propia muerte. Las ciencias deductivas no pueden observar al sujeto; sólo ven sus sombras. Hay una falta de mundo que impide al sujeto de cognición reconocerse como mortal. Por eso, como afirma Susanne, "con las matemáticas no se puede educar a una persona"[13]. Hay más. La tarea ética se superpone a la lógica y epistemológica.

Broch, el poeta renuente[14] (también físico, matemático y filósofo), recoge en esta novela de enfoque metafísico y estilo lírico su modo de estar en el mundo. Sus demonios, sus luchas y sus convencimientos. *El valor desconocido* tiene una profundidad envidiable. Muestra su aguda capacidad de percepción de las "esencias" y de aquello que yace bajo ellas. Es una lectura necesaria para pensar qué podemos y debemos saber.

Referencias

1 HERMANN BROCH, *El valor desconocido.* Isabel García Adáñez (trad.), Sexto Piso, p. 40
2 HERMANN BROCH, *Ibid*, p. 13
3 HERMANN BROCH, *En mitad de la vida. Poesía completa*. Clara Janés (prólogo). Montserrat Armas y Rafael-José Díaz (trad.), Igitur/poesía, p. 22
4 HANNAH ARENDT, *Hombres en tiempos de oscuridad.* Claudia Ferrari y Agustín Serrano de Haro (trad.), Gedisa, p. 139
5 HANNAH ARENDT, Ibid. p. 129
6 HANNAH ARENDT, Ibid. p. 153
7 HANNAH ARENDT, Ibid. p. 135
8 HERMANN BROCH, *En mitad de la vida*. Poesía completa. Ibid. p.56
9 HANNAH ARENDT, *Hombres en tiempos de oscuridad*. Ibid. p. 146
10 HERMANN BROCH, *En mitad de la vida*. Poesía completa. Ibid. p.75
11 HANNAH ARENDT, *Hombres en tiempos de oscuridad*. Ibid. p. 137, 146
12 HANNAH ARENDT, Ibid. p. 158, 159
13 HERMANN BROCH, *El valor desconocido*. Ibid. p.72
14 HANNAH ARENDT, Ibid. p. 119

"El cielo estrellado por encima de mí y la ley moral en mi interior"
Kant. *Crítica de la razón práctica*

QED

Asociación matemática de estudiantes

Revista matemática. Primer número, segunda edición.

Verano del 2022

Agradecimientos

Gracias al Departamento de Matemáticas por apoyar esta iniciativa, por dedicarnos su tiempo y por crear un espacio de colaboración entre alumnado y profesorado. Hacemos especial mención a Fernando Chamizo, que depositó su confianza en este proyecto desde el principio. Su apoyo ha sido un pilar fundamental.

Diseño y maquetación

Irene Ramiro López
Alba Lirón León
Lucía Peceño Romero

Comisión de corrección

Samuel Nevado Rodrigo
Julián Allwright González
Jorge Sánchez Polo
Luís Sánchez Polo
Jaime Gómez Ramírez
Ángel Campos Parrilla

Profesorado involucrado en la corrección

Fernando Chamizo Lorente
José Pedro Moreno Díaz
Pablo Fernández Gallardo
Fernando Soria de Diego
Fernando Quirós Gracián
Eugenio Hernández Rodríguez

Portada

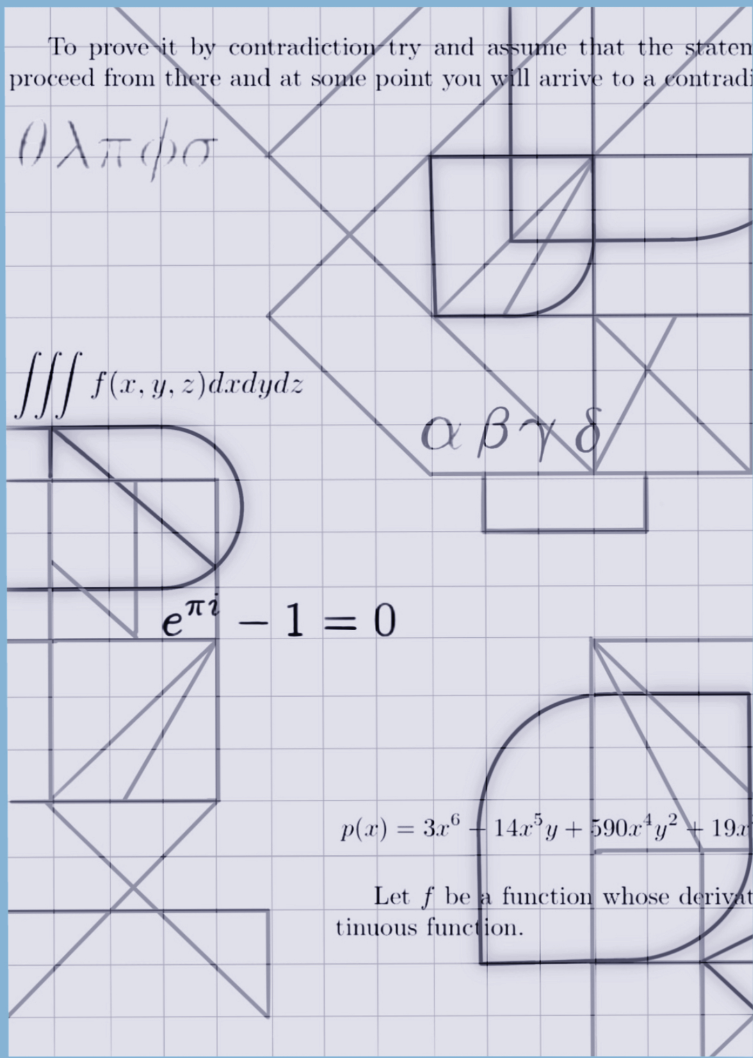
Lucía Yubero Fernández
Irene Ramiro López

Ilustración

Carla Moreno Basteiro
Irene Ramiro López
Samuel Nevado Rodrigo
Lucía Yubero Fernández

QED

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID



QED

Asociación matemática de estudiantes

UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID